

## EGZAMIN, ANALIZA A1, 29.01.2010

8 zadań po 5 punktów, progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

### Zadanie 1.

W każdym z czterech poniższych zadań udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.

Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

#### Wyjątki:

Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **4 punkty**.

Za udzielenie poprawnych odpowiedzi we wszystkich 16 podpunktach otrzymasz **5 punktów**.

**1.1** O zdaniu  $T(n)$  wiadomo, że prawdziwe jest  $T(100)$ , a ponadto dla każdej liczby naturalnej  $n > 5$  zachodzi implikacja  $T(n) \Rightarrow T(n-5)$ . Czy stąd wynika, że

- a)  $T(85)$  jest prawdziwe .....
- b)  $T(93)$  jest prawdziwe .....
- c)  $T(106)$  jest prawdziwe .....
- d)  $T(120)$  jest prawdziwe .....

**1.2** O zdaniu  $T(n)$  wiadomo, że prawdziwe jest  $T(100)$ , a ponadto dla każdej liczby naturalnej  $n > 5$  zachodzi implikacja  $T(n) \Rightarrow T(n-5)$ . Czy stąd wynika, że prawdziwa jest implikacja

- a)  $T(80) \Rightarrow T(95)$  .....
- b)  $T(130) \Rightarrow T(300)$  .....
- c)  $T(166) \Rightarrow T(111)$  .....
- d)  $T(97) \Rightarrow T(77)$  .....

**1.3** O zdaniu  $T(n)$  wiadomo, że prawdziwe jest  $T(1)$ , a ponadto dla każdej liczby naturalnej  $n$  implikacja  $T(2n-1) \Rightarrow T(2n)$  **jest fałszywa**. Czy stąd wynika, że

- a)  $T(5)$  jest prawdziwe .....
- b)  $T(6)$  jest prawdziwe .....
- c)  $T(7)$  jest fałszywe .....
- d)  $T(8)$  jest fałszywe .....

**1.4** O zdaniu  $T(n)$  wiadomo, że prawdziwe jest  $T(1)$ , a ponadto dla każdej liczby naturalnej  $n$  implikacja  $T(3n-1) \Rightarrow T(3n)$  **jest fałszywa**. Czy stąd wynika, że

- a)  $T(7)$  jest prawdziwe .....
- b)  $T(8)$  jest prawdziwe .....
- c)  $T(9)$  jest fałszywe .....
- d)  $T(10)$  jest fałszywe .....

## Zadanie 2.

W każdym z poniższych zdań w miejscu kropek postaw jedną z liter **Z**, **R**, **N**:

**Z** - jest **Z**bieżny (tzn. musi być zbieżny)

**R** - jest **R**ozbieżny (tzn. musi być rozbieżny)

**N** - może być zbieżny lub rozbieżny (tzn. **N**ie wiadomo, czasem jest zbieżny, a czasem rozbieżny)

Podaj tylko odpowiedzi, bez uzasadnienia. Za podanie  $n$  poprawnych odpowiedzi otrzymasz liczbę punktów w/g tabeli

| n      | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|--------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| punkty | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5  |

a) Jeżeli szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest zbieżny, to szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  .....

b) Jeżeli szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest rozbieżny, to szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  .....

c) Jeżeli szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest zbieżny, to szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  .....

d) Jeżeli szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest rozbieżny, to szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  .....

e) Jeżeli szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest zbieżny, to szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$  .....

f) Jeżeli szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest rozbieżny, to szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$  .....

g) Jeżeli szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest zbieżny, to szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - a_n^2)$  .....

h) Jeżeli szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest rozbieżny, to szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - a_n^2)$  .....

i) Jeżeli szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest zbieżny, to szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + a_n^2)$  .....

j) Jeżeli szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest rozbieżny, to szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + a_n^2)$  .....

### Zadanie 3.

Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = 2.$$

Uzasadnić poprawność podanego przykładu.

### Zadanie 4.

Dana jest funkcja  $f$  określona wzorem

$$f(x) = \sqrt{x^4 + 1}.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x, y \in [1, 10]$  zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq 2010 \cdot |x - y|.$$

### Zadanie 5.

Wyznaczyć obszar zbieżności zespolonego szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n \cdot z^{2n}}{n \cdot 2^n}.$$

### Zadanie 6.

Naszkicować wykres funkcji  $f$  określonej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{dla } x < a \\ |x^2 - 4| & \text{dla } a \leq x < b \\ 3 & \text{dla } b \leq x < c \\ |x^2 - 4| & \text{dla } x \geq c \end{cases}$$

dla każdej trójki parametrów  $a < b < c$ , dla której funkcja  $f$  jest ciągła.

### Zadanie 7.

Dane są takie ciągi  $(a_n)$  i  $(b_n)$ , że

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \forall_{n \geq 20/\varepsilon} |a_n + 5| < \varepsilon \quad \text{oraz} \quad \forall_{\varepsilon > 0} \quad \forall_{n \geq 30/\varepsilon} |b_n + 3| < \varepsilon.$$

Niech  $c_n = a_n - 2b_n$ . Wskazać odpowiednią liczbę rzeczywistą  $r$  oraz liczbę naturalną  $P$  i udowodnić, że

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \forall_{n \geq P/\varepsilon} |c_n + r| < \varepsilon.$$

## Zadanie 8.

W każdym z zadań 8.1-8.5 podaj kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** lub **NIE**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy  $-\infty$  albo  $+\infty$ .

Napis  $\infty$  będzie zinterpretowany jako  $+\infty$ .

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz 1 punkt.

Za zadania, w których podasz niepełną lub nie w pełni poprawną odpowiedź, nie otrzymasz punktów.

8.1.  $A = \left\{ \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{2m-3} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$       $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$      Ocena .....

$\inf A = \dots\dots\dots$       $\sup A = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru  $A$  .....     Czy kres górny należy do zbioru  $A$  .....

8.2.  $B = \{\log_2(n+7) - \log_2 n : n \in \mathbb{N}\}$      Ocena .....

$\inf B = \dots\dots\dots$       $\sup B = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru  $B$  .....     Czy kres górny należy do zbioru  $B$  .....

8.3.  $C = \left\{ \frac{(n!)^2}{2^{5n}} : n \in \mathbb{N} \right\}$      Ocena .....

$\inf C = \dots\dots\dots$       $\sup C = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru  $C$  .....     Czy kres górny należy do zbioru  $C$  .....

8.4.  $D = \left\{ \frac{m+n}{\sqrt{mn}} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$      Ocena .....

$\inf D = \dots\dots\dots$       $\sup D = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru  $D$  .....     Czy kres górny należy do zbioru  $D$  .....

8.5.  $E = \left\{ \frac{(-1)^n}{n^2+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$      Ocena .....

$\inf E = \dots\dots\dots$       $\sup E = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru  $E$  .....     Czy kres górny należy do zbioru  $E$  .....