

ANALIZA MATEMATYCZNA A1 Wykład: J. Wróblewski
KOŁOKWIUM nr **1**, 13.10.2009, godz. 10.15-11.00

Zadanie 1. (5 punktów)

Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99} + \dots + \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{n}{2n+1}.$$

Zadanie 2. (5 punktów)

W każdym z czterech poniższych zadań udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi TAK/NIE.

Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

Wyjątki:

Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **4 punkty**.

Za udzielenie poprawnych odpowiedzi we wszystkich 16 podpunktach otrzymasz **5 punktów**.

2.1 O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(1)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+4)$. Czy stąd wynika, że

- a) $T(2008)$ jest prawdziwe
- b) $T(2009)$ jest prawdziwe
- c) $T(2013)$ jest fałszywe
- d) $T(2014)$ jest fałszywe

2.2 O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(1)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+4)$. Czy stąd wynika, że prawdziwa jest implikacja

- a) $T(80) \Rightarrow T(92)$
- b) $T(81) \Rightarrow T(93)$
- c) $T(96) \Rightarrow T(76)$
- d) $T(97) \Rightarrow T(77)$

2.3 Czy prawdziwa jest nierówność

- | | |
|--|--|
| a) $\binom{999}{111} < \binom{999}{444}$ | b) $\binom{999}{222} < \binom{999}{555}$ |
| c) $\binom{999}{333} < \binom{999}{666}$ | d) $\binom{999}{444} < \binom{999}{777}$ |

2.4 Czy prawdziwa jest równość

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| a) $\sum_{i=1}^3 i = 6$ | b) $\sum_{i=1}^3 2 = 6$ |
| c) $\prod_{i=1}^3 i = 6$ | d) $\prod_{i=1}^3 2 = 6$ |

KOŁOKWIUM nr 2, 20.10.2009, godz. 10.15-11.00

Zadanie 3. (5 punktów)

Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$16^n \cdot \binom{4n}{2n} < 27^n \cdot \binom{4n}{n}.$$

Zadanie 4. (5 punktów)

Niech

$$G(1)=1, \quad G(2)=6, \quad G(3)=5, \quad \text{oraz} \quad G(n+3)=3 \cdot G(n+1)+2 \cdot G(n) \quad \text{dla } n=1,2,3,\dots$$

Dowieść, że wówczas dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$G(n)=2^n+n \cdot (-1)^n.$$

KOŁOKWIUM nr 3, 27.10.2009, godz. 10.15-11.00

Zadanie 5. (5 punktów)

Dowieść, że liczba $\log_{20} 50$ jest niewymierna.

Zadanie 6. (7 punktów)

Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{\sqrt{9n+16}-3\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}} \leq 2C.$$

KOŁOKWIUM nr 4, 3.11.2009, godz. 10.15-11.00

Zadanie 7. (5 punktów)

Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$8n \leq 2^n + 16.$$

Zadanie 8. (5 punktów)

Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{\sqrt{9n+40}-\sqrt{9n+16}}{\sqrt{4n+45}-\sqrt{4n+5}} \leq 5C.$$

KOŁOKWIUM nr 5, 10.11.2009, godz. 10.15-11.00

Zadanie 9. (6 punktów)

Udowodnić nierówność

$$n^{2^{27}} \leq 2^n$$

dla wybranej przez siebie liczby naturalnej $n > 1$. (Należy wybrać jedną liczbę n spełniającą nierówność i dla tej liczby udowodnić nierówność.)

Przypomnienie: Potęgowanie wykonujemy **od góry**, tzn. $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.

Zadanie 10. (6 punktów)

Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+2} + n^{22}}{\sqrt{4^{n+4} + n^{4444}}}$$

lub uzasadnić, że granica nie istnieje.

KOŁOKWIUM nr 6, 17.11.2009, godz. 10.15-11.00

Zadanie 11. (6 punktów)

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^3 \cdot \sqrt{n^2 + 1} - n^4 - \frac{n^2}{2} \right).$$

Zadanie 12. (6 punktów)

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{8n^2 + 1}}{\sqrt{2n^4 + 1}} + \frac{\sqrt{8n^2 + 2}}{\sqrt{2n^4 + 2}} + \frac{\sqrt{8n^2 + 3}}{\sqrt{2n^4 + 3}} + \frac{\sqrt{8n^2 + 4}}{\sqrt{2n^4 + 4}} + \dots + \frac{\sqrt{8n^2 + 3n}}{\sqrt{2n^4 + 3n}} \right).$$

KOŁOKWIUM nr 7, 24.11.2009, godz. 10.15-11.00

Zadanie 13. (13 punktów)

W każdym z zadań **13.1-13.13** podaj kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** lub **NIE**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty$.

Napis ∞ będzie zinterpretowany jako $+\infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz 1 punkt.

Za zadania, w których podasz niepełną lub nie w pełni poprawną odpowiedź, nie otrzymasz punktów.

13.1. $A = \{x^2 : x \in (-3, 2)\}$ Ocena

$\inf A = \dots \sup A = \dots$

Czy kres dolny należy do zbioru A Czy kres górny należy do zbioru A

13.2. $B = \{x^3 : x \in (-3, 2)\}$ Ocena

$\inf B = \dots \sup B = \dots$

Czy kres dolny należy do zbioru B Czy kres górny należy do zbioru B

13.3. $C = \left\{ \frac{1}{5n-13} : n \in \mathbb{N} \right\}$ $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ Ocena

$\inf C = \dots \sup C = \dots$

Czy kres dolny należy do zbioru C Czy kres górny należy do zbioru C

13.4. $D = \left\{ \frac{\sqrt[n]{2}}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ Ocena

$\inf D = \dots \sup D = \dots$

Czy kres dolny należy do zbioru D Czy kres górny należy do zbioru D

13.5. $E = \{n^2 - 5n : n \in \mathbb{N}\}$ Ocena

$\inf E = \dots \sup E = \dots$

Czy kres dolny należy do zbioru E Czy kres górny należy do zbioru E

$$13.6. F = \left\{ \frac{13^n}{n!} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Ocena } \dots\dots$$

$$\inf F = \dots\dots\dots \sup F = \dots\dots\dots$$

Czy kres dolny należy do zbioru F Czy kres górny należy do zbioru F

$$13.7. G = \left\{ \left(-\frac{1}{2} \right)^n : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Ocena } \dots\dots$$

$$\inf G = \dots\dots\dots \sup G = \dots\dots\dots$$

Czy kres dolny należy do zbioru G Czy kres górny należy do zbioru G

$$13.8. H = \left\{ \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+2} : m, n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Ocena } \dots\dots$$

$$\inf H = \dots\dots\dots \sup H = \dots\dots\dots$$

Czy kres dolny należy do zbioru H Czy kres górny należy do zbioru H

$$13.9. I = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2m^2 < 3n^2 \right\} \quad \text{Ocena } \dots\dots$$

$$\inf I = \dots\dots\dots \sup I = \dots\dots\dots$$

Czy kres dolny należy do zbioru I Czy kres górny należy do zbioru I

$$13.10. J = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^m > 3^n \right\} \quad \text{Ocena } \dots\dots$$

$$\inf J = \dots\dots\dots \sup J = \dots\dots\dots$$

Czy kres dolny należy do zbioru J Czy kres górny należy do zbioru J

$$13.11. K = \left\{ \frac{mn}{m^2 + 9n^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Ocena } \dots\dots$$

$$\inf K = \dots\dots\dots \sup K = \dots\dots\dots$$

Czy kres dolny należy do zbioru K Czy kres górny należy do zbioru K

$$13.12. L = \left\{ 7n + \frac{n! + n^{2009} + 1}{n! + n^{2009} + 4} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Ocena } \dots\dots$$

$$\inf L = \dots\dots\dots \sup L = \dots\dots\dots$$

Czy kres dolny należy do zbioru L Czy kres górny należy do zbioru L

$$13.13. M = \left\{ \frac{m+n}{p} : m, n, p \in \mathbb{N} \wedge m^2 > 2p^2 \wedge n^2 > 3p^2 \right\} \quad \text{Ocena } \dots\dots$$

$$\inf M = \dots\dots\dots \sup M = \dots\dots\dots$$

Czy kres dolny należy do zbioru M Czy kres górny należy do zbioru M