

ANALIZA MATEMATYCZNA A2 Wykł.: J. Wróblewski
KOŁOKWIUM nr **1**, 10.03.2010, godz. 13.15-14.00

Zadanie 28. (5 punktów)

Korzystając z definicji pochodnej wyprowadzić wzór na pochodną funkcji

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}.$$

Zadanie 29. (5 punktów)

Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = -5x + \ln(e^{2x} + e^{8x}).$$

Udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność

$$|f'(x)| < 3.$$

KOŁOKWIUM nr **2**, 17.03.2010, godz. 13.15-14.00

Zadanie 30. (5 punktów)

Wyznaczyć liczby rzeczywiste a, b , dla których funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \leq 1 \\ ax + b & \text{dla } x > 1 \end{cases}$$

jest różniczkowalna.

Wyprowadzić wzór na f' . Naszkicować wykres funkcji f oraz wykres jej pochodnej.

Zadanie 31. (5 punktów)

Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i ma ciągłą pochodną. Wiadomo, że

$$f(0) = 0, \quad f(3) = 9, \quad f(5) = 11.$$

Dowieść, że istnieje taka liczba rzeczywista x , że $f'(x) = 2$.

KOŁOKWIUM nr **3**, 24.03.2010, godz. 13.15-14.00

Zadanie 32. (5 punktów)

Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x^2} - e^{2x} + 2x}{x^3} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}.$$

Dla której wartości parametru A istnieje $f'(0)$ i ile jest równa?

Zadanie 33. (5 punktów)

Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x) = \sqrt{x} - \log_2 x$$

na przedziale $[4, 16]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

KOŁOKWIUM nr **4**, 31.03.2010, godz. 13.15-14.00

Zadanie 34. (5 punktów)

Na potrzeby tego zadania funkcję dwukrotnie różniczkowalną $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nazwiemy **superwypukłą**, jeżeli dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $f''(x) \geq 1$.

Dowieść, że dowolna funkcja superwypukła spełnia nierówność

$$f(1) \leq \frac{f(0) + f(2)}{2} - \frac{1}{2}.$$

Zadanie **35.** (5 punktów)

W każdym z poniższych zadań udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.

Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **4 punkty**.

Za udzielenie 16 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **5 punktów**.

35.1 Czy funkcja f określona wzorem

$$f(x) = a \cdot e^{|x|} + b \cdot \sin|x| + c \cdot \cos|x| + d \cdot |x|$$

jest różniczkowalna dla

a) $a = -1, b = -2, c = -4, d = 3$

b) $a = 2, b = 3, c = -4, d = -5$

c) $a = 3, b = -4, c = -5, d = 6$

d) $a = -4, b = 5, c = -7, d = 6$

35.2 Czy funkcja f określona wzorem

$$f(x) = A \cdot \{x\}^4 + B \cdot \{x\}^3 + C \cdot \{x\}^2 + D \cdot \{x\} + E$$

jest różniczkowalna dla

a) $A = 1, B = 0, C = -2, D = 3, E = 7$

b) $A = 3, B = -4, C = 0, D = 1, E = 5$

c) $A = 1, B = -1, C = -1, D = 1, E = 11$

d) $A = 2, B = -2, C = -1, D = 1, E = 8$

35.3 Funkcja różniczkowalna $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunki

$$f(1) = 2 \quad \text{oraz} \quad f(3) = 8.$$

Czy stąd wynika istnienie takiej liczby rzeczywistej x , że

a) $f(x) = 3$

b) $f(x) = 6$

c) $f'(x) = 3$

d) $f'(x) = 6$

35.4 O funkcji różniczkowalnej $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wiadomo, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x

$$3 < f'(x) < 5,$$

a ponadto $f(2) = 3$. Czy stąd wynika, że

a) $-6 < f(0) < -3$

b) $-3 < f(1) < 0$

c) $12 < f(5) < 24$

d) $12 < f(6) < 24$

KOŁOKWIUM nr 5, 7.04.2010, godz. 13.15-14.00

Zadanie 36. (5 punktów)

Funkcja dwukrotnie różniczkowalna $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ma pochodną drugiego rzędu określoną wzorem $f''(x) = 6/x^4$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a ponadto

$$f(1) = 3, \quad f(-1) = 6, \quad f'(1) = -1, \quad f'(-1) = -2.$$

Obliczyć $f(10) - f(-10)$.

Zadanie 37. (5 punktów)

Na wyspach Bergamutach podobno jest kot w butach i podobno zamiast zwykłych funkcji trygonometrycznych używają tam funkcji *losinus*, *nosinus* oraz *sosinus* podlegających następującym regułom różniczkowania:

$$\frac{d}{dx} \text{los } x = \text{nos } x, \quad \frac{d}{dx} \text{nos } x = \text{sos } x, \quad \frac{d}{dx} \text{sos } x = \text{los } x.$$

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int x^2 \text{los } x \, dx$$

wyrażając wynik przy pomocy funkcji los, nos i sos.

KOŁOKWIUM nr 6, 14.04.2010, godz. 13.15-14.00

Zadanie 38. (6 punktów)

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{x^n \, dx}{x^{120} - 1},$$

gdzie n jest dowolnie wybraną przez Ciebie liczbą naturalną spełniającą nierówność $60 \leq n \leq 100$.

Zadanie 39. (6 punktów)

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{e^x + 2\sqrt{e^x - 1}}.$$

KOŁOKWIUM nr 7, 21.04.2010, godz. 13.15-14.00

Zadanie 40. (5 punktów)

Na potrzeby tego zadania funkcję dwukrotnie różniczkowalną $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nazwiemy **supersuperwypukłą**, jeżeli dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $f''(x) \geq 2$.

Dowieść, że dowolna funkcja supersuperwypukła spełnia nierówność

$$f(3) \leq \frac{f(1) + f(5)}{2} - 4.$$

Zadanie 41. (5 punktów)

Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_1^9 \sqrt{x+4-4\sqrt{x}} \, dx.$$

KOŁOKWIUM nr **8**, 28.04.2010, godz. 13.15-14.00

Zadanie **42.** (4+1 punktów)

a) Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_2^7 \frac{dx}{x^3 - x}.$$

b) Doprowadzić wynik do postaci $\ln q$, gdzie q jest liczbą wymierną.

Zadanie **43.** (5+P punktów)

a) Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{4n^2 + (n+1)^2} + \frac{n}{4n^2 + (n+2)^2} + \frac{n}{4n^2 + (n+3)^2} + \frac{n}{4n^2 + (n+4)^2} + \dots + \frac{n}{40n^2} \right).$$

b) Doprowadzić wynik do postaci π/P , gdzie $P \in \mathbb{N}$ jest liczbą punktów możliwych do uzyskania za podpunkt b).