

ANALIZA MATEMATYCZNA A1 Wykł.: J. Wróblewski
KOŁOKWIUM nr **8**, 1.12.2009, godz. 10.15-11.00

Zadanie **14.** (5 punktów)

Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^3+64} - \sqrt{n^3+1} \right).$$

Zadanie **15.** (3+3=6 punktów)

a) Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n^4 - 7n^3 + 1}{19n^5 - 13n^2 + 1}.$$

b) Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n^4 - 7n^3 + 1}{19n^6 - 13n^2 + 1}.$$

KOŁOKWIUM nr **9**, 8.12.2009, godz. 10.15-11.00

Zadanie **16.** (5 punktów)

Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{3n}{n} \cdot n! \cdot a^n}{n^n}$$

w zależności od parametru rzeczywistego dodatniego a . Dla jednej wartości a można nie udzielić odpowiedzi.

Zadanie **17.** (4+4=8 punktów)

a) Udowodnić zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (-1)^n}{2^n}.$$

b) Obliczyć jego sumę.

KOŁOKWIUM nr **10**, 15.12.2009, godz. 10.15-11.00

Zadanie **18.** (6 punktów)

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{n^2+k} - n}{k}.$$

Zadanie **19.** (6 punktów)

Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^{2009}}{2n^2}.$$

KOŁOKWIUM nr **11**, **22.12.2009**, godz. 10.15-11.00

Zadanie **20.** (5 punktów)

Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2.$$

Uzasadnić poprawność podanego przykładu.

Zadanie **21.** (5 punktów)

Wyznaczyć wszystkie pary parametrów rzeczywistych (a, b) , dla których funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x & \text{dla } x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty) \\ ax^2 + b & \text{dla } x \in [-1, 2] \end{cases}$$

jest ciągła.

KOŁOKWIUM nr **12**, **5.01.2010**, godz. 10.15-11.00

Zadanie **22.** (5 punktów)

Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 2$ zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^9 < \frac{n^{10}}{10}.$$

Zadanie **23.** (5+10=15 punktów) Nie otrzymuje się częściowych punktów w podpunkcie **b)** za uwagi nie stanowiące zasadniczej części poprawnego rozwiązania.

a) Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C, D i udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{x^{2010} + 2009x^2 + 1}{x^{2010} + 2009x^{2008} + 1} \leq D.$$

b) W podpunkcie **a)** podać dowód prawej nierówności z $D = 100$ (dla każdego x) lub udowodnić nierówność

$$\frac{x^{2010} + 2009x^2 + 1}{x^{2010} + 2009x^{2008} + 1} > 100$$

dla jednej, odpowiednio dobranej, liczby rzeczywistej x .

KOŁOKWIUM nr **13**, 12.01.2010, godz. 10.15-11.00

Zadanie **24.** (5 punktów)

Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią δ i udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $x \in (8 - \delta, 8 + \delta)$ zachodzi nierówność

$$\left| \sqrt[3]{x} - 2 \right| < \frac{1}{100}.$$

Zadanie **25.** (5+15=20 punktów) Nie otrzymuje się częściowych punktów w podpunkcie **b)** za uwagi nie stanowiące zasadniczej części poprawnego rozwiązania.

a) Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{n^4 + n^2 + 1}$$

w zależności od parametru rzeczywistego **dodatniego** p .

b) Obliczyć sumę szeregu w podpunkcie **a)** dla **jednej** spośród tych wartości parametru p , dla których **szereg jest zbieżny**.

KOŁOKWIUM nr **14**, 19.01.2010, godz. 10.15-11.00

Zadanie **26.** (5 punktów)

Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n! \cdot x^{n^2}}{n^n}.$$

Zadanie **27.** (5+5=10 punktów)

Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \log_2(2^x + 1).$$

a) Wyznaczyć asymptoty funkcji f .

b) Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$