

Konwersatorium 14.04.2010 (zad. 699-706)

Ćwiczenia 15.04.2010 (zad. 689-698, 707-724)

Kolokwium nr 7, 21.04.2010 (do zad. 724)

Konwersatorium 21.04.2010 (zad. 753-759)

Ćwiczenia 22.04.2010 (zad. 725-752)

Kolokwium nr 8, 28.04.2010 (do zad. 759)

Konwersatorium 28.04.2010 (zad. 787-793)

Ćwiczenia 29.04.2010 (zad. 760-786)

Kolokwium nr 9, 5.05.2010 (do zad. 793)

6. Całka oznaczona.

689. Przemek ma przygotować referat dotyczący całki oznaczonej. Przemek chce podać następujące wzory zachodzące dla funkcji ciągłej f na przedziale $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \inf_{x \in [a+(k-1)\frac{b-a}{n}, a+k\frac{b-a}{n}]} f(x) \quad (A)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \sup_{x \in [a+(k-1)\frac{b-a}{n}, a+k\frac{b-a}{n}]} f(x) \quad (B)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \quad (C)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \quad (D)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a+(k-1/2)\frac{b-a}{n}\right) \quad (E)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \right) \quad (F)$$

Przemek poprosił Gosię o wykonanie rysunków ilustrujących powyższe wzory. Niestety Gosia nie napisała, który rysunek odpowiada któremu wzorowi.

Pomóż Przemkowi przyporządkować rysunki (rys. 1-6, str. 50-52) odpowiednim wzorom.

Podać wzór na $C_n = \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$ oraz obliczyć $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n$

690. $f(x) = 1$, $a = 5$, $b = 8$ **691.** $f(x) = x$, $a = 0$, $b = 1$

692. $f(x) = x$, $a = 1$, $b = 5$ **693.** $f(x) = x^2$, $a = 0$, $b = 5$

694. $f(x) = x^3$, $a = 0$, $b = 1$ 695. $f(x) = 2x + 5$, $a = -3$, $b = 4$
 696. $f(x) = x^2 + 1$, $a = -1$, $b = 2$ 697. $f(x) = x^3 + x$, $a = 0$, $b = 4$
 698. $f(x) = e^x$, $a = 0$, $b = 1$

Obliczyć następujące całki poprzez konstrukcję ciągu podziałów dziedziny oraz obliczenie granicy ciągu sum Riemanna

699. $\int_2^4 x^{10} dx$ (Wsk. $2 \cdot 2^{k/n}$) 700. $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$ (Wsk. $e^{k/n}$)
 701. $\int_0^{20} x dx$ 702. $\int_1^{10} e^{2x} dx$ 703. $\int_0^1 \sqrt[3]{x} dx$ (Wsk. $\frac{k^3}{n^3}$)
 704. $\int_{-1}^1 |x| dx$ 705. $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ (Wsk. $2^{k/n}$) 706. $\int_0^4 \sqrt{x} dx$ (Wsk. $\frac{4k^2}{n^2}$)

Obliczyć całki oznaczone:

707. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x^{2007} dx$ 708. $\int_0^2 \arctg[x] dx$ 709. $\int_0^2 [\cos x^2] dx$
 710. $\int_0^1 \sqrt{1+x} dx$ 711. $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{(11+5x)^3} dx$ 712. $\int_{-13}^2 \frac{1}{\sqrt[5]{(3-x)^4}} dx$
 713. $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$ 714. $\int_0^3 \operatorname{sgn}(x^3 - x) dx$ 715. $\int_0^1 x e^{-x} dx$
 716. $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$ 717. $\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx$ 718. $\int_0^{\pi} x^3 \sin x dx$
 719. $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx$ 720. $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$ 721. $\int_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$
 722. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}}$ 723. $\int_0^5 |x^2 - 5x + 6| dx$ 724. $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} dx$
 725. $\int_1^2 x \log_2 x dx$ 726. $\int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}} dx$ 727. $\int_0^{6\pi} |\sin x| dx$
 728. $\int_0^{\pi/2} \cos x \sin^{11} x dx$ 729. $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx$
 730. $\int_{-\pi}^{\pi} x^{2007} \cos x dx$ 731. $\int_0^{2\pi} (x - \pi)^{2007} \cos x dx$

Udowodnić następujące oszacowania

732. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx < 2$ 733. $\frac{1}{5} < \int_1^2 \frac{1}{x^2+1} dx < \frac{1}{2}$
 734. $\frac{1}{11} < \int_9^{10} \frac{dx}{x+\sin x} < \frac{1}{8}$ 735. $\int_{-1}^2 \frac{|x|}{1+x^2} dx < \frac{3}{2}$
 736. $\int_0^1 x(1-x^{99+x}) dx < \frac{1}{2}$ 737. $2\sqrt{2} < \int_2^4 x^{1/x} dx$
 738. $5 < \int_1^3 x^x dx < 31$ 739. $\int_1^2 \frac{1}{x} dx < \frac{3}{4}$

Obliczyć granice

740. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}$ 741. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{20} + 2^{20} + 3^{20} + \dots + n^{20}}{n^{21}}$
742. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \right) \cdot n$
743. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2n}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2n+2}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2n+3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{3n}}$
744. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{n} + \sin \frac{2}{n} + \sin \frac{3}{n} + \dots + \sin \frac{n}{n} \right) \cdot \frac{1}{n}$
745. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n} + \sqrt{4n+1} + \sqrt{4n+2} + \dots + \sqrt{5n}) \cdot \frac{1}{n\sqrt{n}}$
746. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{8n}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$
747. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[6]{n} \cdot (\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n+1} + \sqrt[3]{n+2} + \dots + \sqrt[3]{2n})}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \dots + \sqrt{2n}}$
748. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} + \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \frac{n}{n^2+9} + \frac{n}{n^2+16} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2}$
749. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{5n} + \frac{4}{5n+3} + \frac{4}{5n+6} + \frac{4}{5n+9} + \dots + \frac{4}{26n}$
750. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{7n} + \frac{1}{7n+2} + \frac{1}{7n+4} + \frac{1}{7n+6} + \dots + \frac{1}{9n}$
751. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{7n^2} + \frac{1}{7n^2+1} + \frac{1}{7n^2+2} + \frac{1}{7n^2+3} + \dots + \frac{1}{8n^2}$
752. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (e^{\sqrt{\frac{1}{n}}} + e^{\sqrt{\frac{2}{n}}} + e^{\sqrt{\frac{3}{n}}} + \dots + e^{\sqrt{\frac{n}{n}}})$
753. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+3}} + \frac{1}{\sqrt{n+6}} + \frac{1}{\sqrt{n+9}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{7n}} \right) \frac{1}{\sqrt{n}}$
754. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+0}{(3n)^3} + \frac{n^2+1}{(3n+1)^3} + \frac{n^2+2}{(3n+2)^3} + \frac{n^2+3}{(3n+3)^3} + \dots + \frac{n^2+n}{(4n)^3}$
755. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n^2} + \frac{n}{2(n+1)^2} + \frac{n}{2(n+2)^2} + \frac{n}{2(n+3)^2} + \dots + \frac{n}{50n^2}$
756. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n^2} + \frac{n}{n^2+(n+1)^2} + \frac{n}{n^2+(n+2)^2} + \frac{n}{n^2+(n+3)^2} + \dots + \frac{n}{50n^2}$

757. Udowodnić oszacowanie $\frac{19}{3} < \int_2^3 x^x dx < \frac{65}{4}$. **Wskazówka:** Oszacować x^x przez x^a .

Obliczyć granice

758. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2n}\sqrt{3n}} + \frac{1}{\sqrt{2n+1}\sqrt{3n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n+2}\sqrt{3n+2}} + \frac{1}{\sqrt{2n+3}\sqrt{3n+3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{3n}\sqrt{4n}}$

Wskazówka: Niewymierność $\sqrt{(x+a)(x+b)}$ całkujemy wykonując podstawienie $t = \sqrt{\frac{x+a}{x+b}}$.

759. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+\sin(n^2+0^2)}{n^2+0^2} + \frac{n+\sin(n^2+1^2)}{n^2+1^2} + \frac{n+\sin(n^2+2^2)}{n^2+2^2} + \frac{n+\sin(n^2+3^2)}{n^2+3^2} + \dots + \frac{n+\sin(n^2+n^2)}{n^2+n^2}$

Wskazówka: Skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach.

Obliczyć pole figury ograniczonej następującymi krzywymi

760. $y = x^2$ i $y = 2x + 5$

761. $y = e^x$ i prostą przechodzącą przez punkty $(0,1)$ i $(1,e)$

762. $y = \sin x$ i $y = \frac{2x}{\pi}$ 763. $y = x^4$ i $y = x^3$

764. $y = \frac{1}{x}$ i $y = \frac{5}{2} - x$ 765. $y = \frac{1}{x^2}$, $y = \frac{1}{x^3}$ i $x = 2$

Dla danych $f(x)$, a i b obliczyć długość łuku krzywej $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$

766. x , 1 , 2 767. $2x-3$, -7 , 12

768. x^2 , 0, 1 **Wsk.** Skorzystać z tablic całek.

769. e^x , 1, 2 **770.** $\sqrt{x^3}$, 6, 10 **771.** $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$, 0, 1

Dla danych $f(x)$, a i b obliczyć pole powierzchni powstałej przez obrót krzywej $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ wokół osi OX

772. x^3 , 0, 5 **773.** e^{-x} , 0, 10

774. $\sqrt{x}$, 0, 4 **775.** $\sin x$, 0, π **776.** $\cos 7x$, 0, 2π

Dla danych $f(x)$, a i b obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót obszaru $0 \leq y \leq f(x)$, $a \leq x \leq b$ wokół osi OX

777. $\sqrt{x}$, 0, 1 **778.** x , 1, 5 **779.** x^7 , 0, 10

780. e^x , -3, 0 **781.** $\sin x$, 0, $\frac{3\pi}{2}$

Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót obszaru ograniczonego krzywymi o podanych równaniach, wokół osi OY

782. $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$ i $x = 5$ **783.** $y = \sin x$ i $y = -\sin x$, $0 \leq x \leq \pi$

784. $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$ i $x = 2$ **785.** $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 1$ i $x = e$

786. $y^2 = 1 - (x - 2)^2$

787. Obliczyć długość łuku krzywej $y = \sqrt{x+4}^3$, $0 \leq x \leq 5$.

788. Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót obszaru $0 \leq y \leq xe^x$, $0 \leq x \leq 1$ wokół osi OX.

789. Obliczyć długość łuku krzywej $y = \ln x$, $1 \leq x \leq \sqrt{3}$.

790. Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót obszaru $\arctg x \leq y \leq \sqrt{\arctg^2 x + 1} + \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$ wokół osi OX.

791. Pomarańczę o cienkiej skórce pokrojono na plastry równej grubości. Dowieść, że każdy plaster zawiera tyle samo skórki.

792. Od pomarańczy o grubej skórce odkrojono końce tak, aby ukazał się miąższ. Pozostałą część pokrojono na plastry równej grubości. Dowieść, że każdy plaster zawiera tyle samo skórki.

793. Pasem o szerokości d nazywamy obszar płaszczyzny zawarty pomiędzy dwiema prostymi równoległymi odległymi o d , wraz z tymi prostymi.

Czy koło można pokryć pasami o sumie szerokości mniejszej od średnicy koła?

Pasów ma być skończenie wiele.