

Zadanie domowe do 17 maja 2010 - zajrzyj na stronę wykładu

Konwersatorium 12.05.2010 (zad. 862-867)

Kolokwium nr 11, 19.05.2010 (do zad. 867)

Konwersatorium 19.05.2010 (zad. 883-888)

Ćwiczenia 20.05.2010 (zad. 868-882)

Kolokwium nr 12, 26.05.2010 (do zad. 888)

Ćwiczenia 27.05.2010 (zad. 889-902)

Konwersatorium 26.05.2010 (zad. 903-906)

Ćwiczenia 2.06.2010 (zad. 907-916)

Kolokwium nr 13, 9.06.2010 (do zad. 916)

W środę 2.06.2010 odbędą się zajęcia czwartkowe !!!**8. Pochodne i całki - powtórzenie, uzupełnienie.**

862. Czy dla dowolnej funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mającej ciągłą pochodną rzędu pierwszego i takiej, że $f(0) = 0$, prawdziwa jest podana implikacja (zmienna x przebiega liczby rzeczywiste spełniające nierówność podaną pod kwantyfikatorem)

- a) $\left(\forall_{x>0} f(x) > 0 \right) \Rightarrow \left(\forall_{x>0} f'(x) > 0 \right)$
- b) $\left(\forall_{x>0} f'(x) > 0 \right) \Rightarrow \left(\forall_{x>0} f(x) > 0 \right)$
- c) $\left(\forall_{x<0} f(x) > 0 \right) \Rightarrow \left(\forall_{x<0} f'(x) > 0 \right)$
- d) $\left(\forall_{x<0} f(x) > 0 \right) \Rightarrow \left(\forall_{x<0} f'(x) < 0 \right)$
- e) $\left(\forall_{x<0} f'(x) > 0 \right) \Rightarrow \left(\forall_{x<0} f(x) > 0 \right)$
- f) $\left(\forall_{x<0} f'(x) > 0 \right) \Rightarrow \left(\forall_{x<0} f(x) < 0 \right)$
- g) $\left(\forall_{x>0} f(x) \neq 0 \right) \Rightarrow \left(\forall_{x>0} f'(x) \neq 0 \right)$
- h) $\left(\forall_{x>0} f'(x) \neq 0 \right) \Rightarrow \left(\forall_{x>0} f(x) \neq 0 \right)$
- i) $\left(\forall_{x>0} f(x) = 0 \right) \Rightarrow \left(\forall_{x>0} f'(x) = 0 \right)$
- j) $\left(\forall_{x>0} f'(x) = 0 \right) \Rightarrow \left(\forall_{x>0} f(x) = 0 \right)$
- k) $\left(\exists_{x>0} f(x) = 0 \right) \Rightarrow \left(\exists_{x>0} f'(x) = 0 \right)$
- l) $\left(\exists_{x>0} f'(x) = 0 \right) \Rightarrow \left(\exists_{x>0} f(x) = 0 \right)$
- m) $\left(\exists_{x>0} f(x) > 0 \right) \Rightarrow \left(\exists_{x>0} f'(x) > 0 \right)$
- n) $\left(\exists_{x>0} f'(x) > 0 \right) \Rightarrow \left(\exists_{x>0} f(x) > 0 \right)$

863. Czy funkcja $f(x) = a \cdot |x| + b \cdot \sin|x| + c \cdot \cos|x|$ jest różniczkowalna w zerze, jeżeli

a) $a = 1, b = 1, c = 1$

b) $a = -1, b = 1, c = 1$

c) $a = 1, b = -1, c = 1$

d) $a = 1, b = 1, c = -1$

864. Czy prawdziwa jest nierówność

a) $\int_2^4 2^x dx > 10$

b) $\int_{-10}^0 2^x dx > 10$

c) $\int_0^2 2^x dx > 10$

d) $\int_4^5 2^x dx > 10$

865. Czy podana całka ma wartość dodatnią?

a) $\int_{-1}^1 x^2 \cdot \sqrt{x^8 + 1} dx$

b) $\int_{-2}^1 x^3 \cdot \sqrt{x^8 + 1} dx$

c) $\int_{-1}^2 x^5 \cdot \sqrt{x^8 + 1} dx$

d) $\int_{-2}^2 x^7 \cdot \sqrt{x^8 + 1} dx$

866. Obliczyć wartość całki

$$\int_0^{\pi/3} \cos^5 x dx .$$

867. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{e^x + 1}{e^{3x} + e^x} dx .$$

868. Znaleźć największą liczbę całkowitą dodatnią n , dla której istnieje taka liczba rzeczywista A , że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x} - 1 + \ln(x+1)}{x^n} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze i obliczyć $f'(0)$ dla tych wartości n i A .

869. Wyznaczyć kresy zbioru

$$A = \left\{ \int_0^a x^2 - a \, dx : a \in (0, 3) \right\}$$

i określić, czy należą one do zbioru A .

870. Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ma ciągłą pochodną rzędu pierwszego na całej prostej. Wiadomo, że $f(0) = 0$, $f(7) = 12$, a ponadto dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$1 < f'(x) < 2.$$

Dowieść, że wówczas zachodzi nierówność

$$|f(4) - \dots\dots\dots| < 1.$$

W miejsce kropek należy wpisać **konkretną** liczbę rzeczywistą (niezależną od f !!!).

871. Rozstrzygnąć zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^{\infty} \frac{x^p + 1}{\sqrt{x^5 + x}} \, dx$$

w zależności od parametru rzeczywistego dodatniego p .

872. Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ma ciągłą pochodną rzędu pierwszego na całej prostej. Wiadomo, że $f(0) = 0$, $f(5) = 9$, a ponadto dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi

$$f'(x) \neq 3.$$

Dowieść, że wówczas zachodzi nierówność

$$|f(3) - \dots\dots\dots| < 3.$$

W miejsce kropek należy wpisać **konkretną** liczbę rzeczywistą (niezależną od f !!!).

873. Czy podana całka niewłaściwa jest zbieżna

$$\text{a)} \int_1^{\infty} \frac{x+1}{x^2+2} dx$$

$$\text{b)} \int_1^{\infty} \frac{x+1}{x^3+2} dx$$

$$\text{c)} \int_0^1 \frac{x+1}{x^2+\sqrt{x}} dx$$

$$\text{d)} \int_0^1 \frac{x^2+1}{x^2+\sqrt{x}} dx$$

$$\text{e)} \int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^3+\sqrt{x}} dx$$

$$\text{f)} \int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+\sqrt{x}} dx$$

$$\text{g)} \int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+x} dx$$

874. Czy prawdziwa jest nierówność

$$\text{a)} \int_2^4 \frac{dx}{\log_2 x} < 1$$

$$\text{b)} \int_2^4 \frac{dx}{\log_2 x} < 2$$

$$\text{c)} \int_4^8 \frac{dx}{\log_2 x} < 2$$

$$\text{d)} \int_4^8 \frac{dx}{\log_2 x} < 3$$

$$\text{e)} \int_{20}^{30} \frac{dx}{\log_2 x} < 3$$

$$\text{f)} \int_{20}^{30} \frac{dx}{\log_2 x} < 4$$

$$\text{g)} \int_{33}^{63} \frac{dx}{\log_2 x} < 4$$

$$\text{h)} \int_{33}^{63} \frac{dx}{\log_2 x} < 5$$

875. Obliczyć wartość całki

$$\int_2^6 \frac{2x-7}{4x^2+17x+4} dx.$$

876. Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n^2 + (n+1)^2} + \frac{n}{3n^2 + (n+2)^2} + \frac{n}{3n^2 + (n+3)^2} + \frac{n}{3n^2 + (n+4)^2} + \dots + \frac{n}{12n^2} \right).$$

877. Obliczyć całkę

$$\int x^p \cdot e^{x^\pi} dx$$

dla odpowiednio dobranej wartości parametru rzeczywistego $p \in [3, 8]$.

878. Znaleźć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{5x} - e^{3x} - 2x}{x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze i obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości A .

879. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x) = x - 2 \operatorname{arctg} x$$

na przedziale $[0, 4]$. Podać punkty, w których wartości najmniejsza i największa są osiągnięte.

880. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \operatorname{arctg} \left(\frac{x-1}{x+1} \right) - \operatorname{arctg} x$$

na przedziale $[0, 37]$ oraz podać punkty, w których wartości najmniejsza i największa są osiągnięte.

881. Znaleźć taką funkcję różniczkowalną $F: \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\} \rightarrow \mathbb{R}$, że

$$F'(x) = \frac{1}{x(x+2)}$$

oraz

$$F(-3) = F(-1) = F(1) = 0$$

lub uzasadnić, że taka funkcja nie istnieje.

882. Obliczyć całkę

$$\int_1^3 \frac{dx}{x^2 - 4x + 5}.$$

883. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}.$$

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję f daną wzorem

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{3n+1}. \quad (1)$$

Przedziałem zbieżności szeregu potęgowego definiującego funkcję f jest przedział

Na tym przedziale funkcja f jest ciągła, a we wnętrzu tego przedziału możemy różniczkować szereg potęgowy wyraz za wyrazem. Tak więc we wnętrzu przedziału zbieżności funkcji f mamy

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

Zatem funkcja f jest funkcją pierwotną powyższej funkcji i do znalezienia wzoru definiującego funkcję f bez szeregu potęgowego wystarczy obliczyć całkę $\int f'(x)dx$.

Korzystając ze wzoru

$$\begin{aligned} \int \frac{ax^2 + bx + c}{1 - x^3} dx = \\ = (c-b) \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{1+2x}{\sqrt{3}} \right) - \frac{(b+c) \ln|1-x|}{3} + \frac{(b+c) \ln(x^2+x+1)}{6} - \frac{a \ln|1-x^3|}{3} + C \end{aligned}$$

dla $a = \dots\dots\dots$, $b = \dots\dots\dots$, $c = \dots\dots\dots$ otrzymujemy

$$f(x) = \int f'(x)dx = \dots\dots\dots \quad (2)$$

W celu dobrania odpowiedniej stałej całkowania C porównujemy wzory (1) i (2) dla $x = \dots\dots\dots$ Zgodnie ze wzorem (1)

$$f(\dots\dots) = \dots\dots,$$

natomiast wzór (2) daje

$$f(\dots) = \dots + C =$$

$$= \dots + C.$$

Stąd

$$C = \dots$$

i ostatecznie

$$f(x) = \dots \quad (3)$$

Przyjmując $x = \dots$ we wzorze (1) otrzymujemy dany w zadaniu szereg liczbowy jako równy $\dots$. Z drugiej strony wzór (3) daje

$$f(\dots) = \dots =$$

$$= \dots =$$

$$= \dots$$

Odpowiedź: Suma danego w zadaniu szeregu liczbowego jest równa

$\dots$

884. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_1^{+\infty} \frac{4dx}{x^2 + 8x}$$

lub uzasadnić, że jest rozbieżna.

885. Funkcja $g : (-8, +\infty)$ zdefiniowana jest wzorem

$$g(x) = \int_0^x \ln \left(\frac{(t+8)^3}{(t+16)^2} \right) dt.$$

Funkcja $f : (-8, +\infty)$ zdefiniowana jest wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}.$$

Dobrać A tak, aby funkcja f była różniczkowalna w zerze oraz obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .

886. Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła na całej prostej, a ponadto ma ciągłą pochodną rzędu pierwszego. Wiemy też, że

$$f(0) = 0, \quad f(2) = 5, \quad f(5) = 9.$$

Dowieść, że istnieje taka liczba rzeczywista x , że $f'(x)$ jest liczbą całkowitą.

887. Dana jest funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \sin \left(39 \cdot (x^{37/\ln x} + 1)^{38} \right)$$

dla $x \in (1, +\infty)$. Dowieść, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $x \in (1, +\infty)$ zachodzi nierówność

$$f'(x) < 40.$$

888. Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = e^x \cdot \cos x.$$

Wyprowadzić wzór na $f^{(2009)}$, czyli pochodną rzędu 2009.

9. Szeregi Fouriera.

Szeregiem Fouriera funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o okresie 2π , całkowalnej na przedziale długości 2π , nazywamy szereg

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

gdzie

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_A^{A+2\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_A^{A+2\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_A^{A+2\pi} f(x) \sin nx dx$$

Powyższe całki nie zależą od wyboru dolnej granicy przedziału całkowania.

Jeżeli ponadto funkcja f jest przedziałami monotoniczna oraz dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$f(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2},$$

to f jest (punktowo) sumą swojego szeregu Fouriera.

Równość Parsevala:

$$\int_A^{A+2\pi} f(x)^2 dx = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Wyznaczyć szereg Fouriera funkcji

889. $f(x) = x$ dla $x \in (-\pi, \pi)$ **890.** $f(x) = |x|$ dla $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$

891. $f(x) = x^2$ dla $x \in (-\pi, \pi)$ **892.** $f(x) = x^2$ dla $x \in (0, 2\pi)$

893. $f(x) = x^2$ dla $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ **894.** $f(x) = \left[\frac{x}{\pi}\right]$ dla $x \in (0, 2\pi)$

895. $f(x) = e^x$ dla $x \in (0, 2\pi)$ **896.** $f(x) = e^x$ dla $x \in (-\pi, \pi)$

897. $f(x) = |\sin x|$ dla $x \in (0, 2\pi)$ **898.** $f(x) = e^{|x|}$ dla $x \in (-\pi, \pi)$

899. $f(x) = \sin \frac{3}{2}x$ dla $x \in (0, 2\pi)$

900. $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla } x \in (0, \pi) \\ \cos x & \text{dla } x \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$

901. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \in (0, \pi) \\ 0 & \text{dla } x \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$

902. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } 0 < x < \pi/2 \\ 1 & \text{dla } \pi/2 < x < 2\pi \end{cases}$

903. Obliczyć

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$$

stosując wzór Parsewala do $f(x) = e^x$ na $(0, 2\pi)$ oraz wstawiając $x = 0$ do szeregu Fouriera tej funkcji. Porównać obydwa wyniki.

904. Obliczyć

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 2}$$

wstawiając $x = 0$ do szeregu Fouriera funkcji $f(x) = \cos(x\sqrt{2})$ na $(0, 2\pi)$.

905. Obliczyć

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$$

używając $f(x) = x(\pi - |x|)$ na $(-\pi, \pi)$.

906. Dowieść, że jeśli f jest funkcją okresową o okresie $2\pi/3$, to w jej szeregu Fouriera $a_n = b_n = 0$ dla n niepodzielnych przez 3.

Normą supremum funkcji f nazywamy liczbę

$$\|f\| = \sup_{x \in D_f} |f(x)|$$

Definicja zbieżności jednostajnej ciągu funkcyjnego:

Ciąg funkcji (f_n) określonych na wspólnej dziedzinie nazywamy zbieżnym **jednostajnie** do f , jeżeli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$$

Jeżeli ciąg (f_n) funkcji ciągłych jest zbieżny jednostajnie do funkcji f , to f jest funkcją ciągłą.

Jeżeli ciąg (f_n) funkcji mających ciągłe pochodne jest zbieżny jednostajnie do funkcji f , a ciąg pochodnych (f'_n) jest zbieżny jednostajnie do funkcji g , to funkcja f jest różniczkowalna i przy tym $f' = g$.

Szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ o wyrazach będących funkcjami określonymi na wspólnej dziedzinie, nazywamy zbieżnym **jednostajnie**, jeżeli ciąg sum częściowych (S_n) określony wzorem

$$S_n = \sum_{k=1}^n f_k$$

jest zbieżny jednostajnie. Tak jak w przypadku szeregów liczbowych, granicę ciągu sum częściowych nazywamy sumą szeregu.

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| < +\infty$, to szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżny jednostajnie.

Jeżeli szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ o wyrazach będących funkcjami ciągłymi, jest zbieżny jednostajnie, to jego suma jest funkcją ciągłą.

Jeżeli wyrazy jednostajnie zbieżnego szeregu funkcyjnego $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ mają ciągłe pochodne, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ też jest zbieżny jednostajnie, to suma szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest funkcją różniczkowalną oraz

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n$$

907. Dowieść, że szereg trygonometryczny

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 + 1}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją ciągłą.

908. Dowieść, że szereg trygonometryczny

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3 + 1}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją różniczkowalną i ma ciągłą pochodną.

W zadaniach **909-911** zakładamy, że funkcja f jest na tyle regularna, że nie ma problemu z obliczeniem współczynników jej szeregu Fouriera, a przy tym f jest sumą swojego szeregu Fouriera.

909. Dowieść, że jeśli f jest funkcją okresową o okresie $\frac{\pi}{2}$, to w jej szeregu Fouriera $a_n = b_n = 0$ dla n niepodzielnych przez 4.

910. Dowieść, że jeśli f jest funkcją okresową o okresie $\frac{2\pi}{5}$, to w jej szeregu Fouriera $a_n = b_n = 0$ dla n niepodzielnych przez 5.

911. Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ okresowa o okresie 2π . Dowieść, że f spełnia dla każdego $x \in \mathbb{R}$ równość

$$f(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

<<< podać warunek w języku współczynników szeregu Fouriera funkcji f >>>

912. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję f określoną wzorem

$$f(x) = \sin^2 x \cdot \cos 5x \cdot \cos 7x.$$

913. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję f określoną wzorem

$$f(x) = \sin^8 x.$$

914. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_{8\pi/7}^{22\pi/7} \cos^{10} x.$$

915. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ pochodna szóstego rzędu dana jest wzorem

$$f^{(6)}(x) = \sin^6 x.$$

916. Wyprowadzić wzór na sumę

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{3^n}.$$

Zadanie dodatkowe. Zdobyć jakikolwiek sensowny program komputerowy rysujący wykresy funkcji. Narysować wykresy funkcji z wybranych kilku zadań spośród 889-905 (lub funkcji, które pojawiły się na wykładzie) oraz wykresy kilku początkowych sum częściowych ich szeregów Fouriera.

Przy okazji zrobić to samo z sumami początkowymi szeregu MacLaurina (Taylora w zerze) funkcji określonych wzorami $\sin x$, $\ln x$, e^x i paru innych.

W przypadku trudności ze zdobyciem programu postarać się zdobyć względy osoby, która program zdobyła.

Zadanie domowe do 17 maja 2010 - zajrzyj na stronę wykładu