

Ćwiczenia 10.06.2010 (zad. 940-951)

Konwersatorium 9.06.2010 (zad. 928-939)

Najważniejsze wzorki (i przykłady) z wykładu dotyczące zespolonej funkcji wykładniczej i logarytmu:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$e^{x+iy} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$$

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot z^n}{n}, \quad |z| \leq 1, \quad z \neq -1$$

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z, \quad z \neq 0$$

$$\ln z = \ln|z| + i \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad z = x + iy, \quad x > 0$$

917. Wyprowadzić wzory na sumy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}.$$

Podać wartość całek

$$(918) \quad \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \sin \sin x \, dx$$

$$(919) \quad \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \cos \sin x \, dx$$

$$(920) \quad \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \cos \sin x \cdot \cos 7x \, dx$$

$$(921) \quad \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \cos \sin x \cdot \sin 7x \, dx$$

$$(922) \quad \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \cos \sin x \cdot \sin^4 x \, dx$$

$$(923) \quad \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \sin \sin x \cdot \sin^5 x \, dx$$

$$(924) \quad \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \sin \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x \cdot \sin 5x \, dx$$

925. Wyprowadzić wzór na sumę

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}.$$

926. Obliczyć

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

przyglądając się na wszystkie strony $\ln(1+i)$.

927. Wyprowadzić wzory na

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin 2nx}{(2n)!} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos 2nx}{(2n)!}$$

korzystając z rozwinięcia

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

oraz ze wzoru

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Odpowiedź:

$$\frac{e^{\sin x} - e^{-\sin x}}{2} \cdot \sin \cos x$$

$$\frac{e^{\sin x} + e^{-\sin x}}{2} \cdot \cos \cos x$$

Podać wartość całek

$$(928) \quad \int_0^{2\pi} \frac{e^{\sin x} + e^{-\sin x}}{2} \cdot \cos \cos x \, dx$$

$$(929) \quad \int_0^{2\pi} \frac{e^{\sin x} + e^{-\sin x}}{2} \cdot \cos \cos x \cdot \cos x \, dx$$

$$(930) \quad \int_0^{2\pi} \frac{e^{\sin x} + e^{-\sin x}}{2} \cdot \cos \cos x \cdot \sin 17x \, dx$$

$$(931) \quad \int_0^{2\pi} \frac{e^{\sin x} + e^{-\sin x}}{2} \cdot \cos \cos x \cdot \cos 2x \, dx$$

$$(932) \quad \int_{\pi}^{5\pi} \frac{e^{\sin x} + e^{-\sin x}}{2} \cdot \cos \cos x \cdot \cos 5x \, dx$$

$$(933) \quad \int_{-48\pi}^{52\pi} \frac{e^{\sin x} + e^{-\sin x}}{2} \cdot \cos \cos x \cdot \cos 52x \, dx$$

$$(934) \quad \int_0^{2\pi} \frac{e^{\sin x} - e^{-\sin x}}{2} \cdot \sin \cos x \, dx$$

$$(935) \quad \int_0^{2\pi} \frac{e^{\sin x} - e^{-\sin x}}{2} \cdot \sin \cos x \cdot \cos 10x \, dx$$

$$(936) \quad \int_0^{2\pi} \frac{e^{\sin x} - e^{-\sin x}}{2} \cdot \sin \cos x \cdot \sin 10x \, dx$$

$$(937) \quad \int_0^{2\pi} \frac{e^{\sin x} - e^{-\sin x}}{2} \cdot \sin \cos x \cdot \sin 11x \, dx$$

$$(938) \quad \int_0^{2\pi} \frac{e^{\sin x} - e^{-\sin x}}{2} \cdot \sin \cos x \cdot \sin 12x \, dx$$

$$(939) \quad \int_0^{2\pi} \frac{e^{\sin x} - e^{-\sin x}}{2} \cdot \sin \cos x \cdot \cos^5 x \cdot \sin 3x \, dx$$

Dla podanej funkcji f :

a) Wyznaczyć największą liczbę naturalną n , dla której funkcja g określona wzorem $g(x) = f(x)/x^n$ ma granicę w zerze (skorzystać ze wzoru Taylora).

b) Definiujemy $g(0)$ tak, aby funkcja g była ciągła. Obliczyć $g'(0)$ oraz $g''(0)$.

940. $f(x) = \sin x - x$ 941. $f(x) = \sin x - x \cos x$

942. $f(x) = e^{-x} - 1 - \ln(x+1)$ 943. $f(x) = \arctg x - x$

944. $f(x) = \arctg x - \sin x$ 945. $f(x) = \arctg x - 2 \sin x + x$

Na potrzeby kolejnych zadań funkcję f nazwiemy **trefloróżniczkowalną** w punkcie x_0 , jeżeli istnieje granica

$$f^{\clubsuit}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2},$$

którą to granicę nazywać będziemy **treflopochodną** funkcji f w punkcie x_0 .

Z definicji zbadać trefloróżniczkowalność i obliczyć treflopochodną funkcji

946. $f(x) = x^3$ 947. $f(x) = e^x$ 948. $f(x) = e^{7x}$ 949. $f(x) = \sin x$

950. Uzasadnić trefloróżniczkowalność porządných¹ funkcji.

951. Dać przykład funkcji, która w zerze jest trefloróżniczkowalna, ale nieciągła.

¹Funkcja porządna to funkcja różniczkowalna odpowiednią do potrzeb liczbę razy.