

Konwersatorium 16.06.2010 (zad. 952-958)

Ćwiczenia 16,17.06.2010 (zad. 959-970)

Zadania 971-1003 będą omawiane na wykładzie.

952. Czy całka niewłaściwa

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{x^3+1} dx$$

jest zbieżna dla

a) $p = -2$

b) $p = -1$

c) $p = 1$

d) $p = 2$

953. Czy nierówność

$$\int_a^b x^7 \cdot 2^{x^6} dx < 2$$

jest prawdziwa dla

a) $a = -3, b = 0$

b) $a = -2, b = 1$

c) $a = -1, b = 2$

d) $a = 0, b = 3$

954. Czy dla dowolnej funkcji różniczkowalnej $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniającej warunki $f(1) = 3$ oraz $f(3) = 13$, istnieje takie $x \in \mathbb{R}$, że $f'(x) = c$, jeżeli

a) $c = 2$

b) $c = 3$

c) $c = 5$

d) $c = 10$

955. Czy funkcja f zdefiniowana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{dla } x < 1 \\ ax^2 + bx + c & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$$

jest różniczkowalna, jeżeli

a) $a = 2, b = -1, c = 0$

b) $a = 1, b = 1, c = 1$

c) $a = 3, b = -3, c = 1$

d) $a = 1, b = -2, c = 2$

956. Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{10x} - 10e^x + 9}{x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}.$$

Dla której wartości parametru A istnieje $f'(0)$ i ile jest równa?**957.** Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n^2 + (n+1)^2} + \frac{n+2}{n^2 + (n+2)^2} + \frac{n+3}{n^2 + (n+3)^2} + \frac{n+4}{n^2 + (n+4)^2} + \dots + \frac{7n}{50n^2} \right).$$

958. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję f określoną wzorem

$$f(x) = \cos^4 x \cdot \cos 4x.$$

959. Obliczyć

$$\int_0^e \frac{dx}{x \cdot ((\ln x)^2 + 1)}.$$

960. Obliczyć

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \sin^3 x \, dx.$$

961. Obliczyć

$$\int_0^{64} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$$

962. Zbadać zbieżność całki

$$\int_0^{+\infty} \frac{5x^7 - 2x^5 + 3\sqrt{x}}{5x^9 - 2x^5 + 3x} \, dx.$$

963. Obliczyć

$$\int_{-1}^2 \frac{x}{x^2 + 2x + 10} \, dx.$$

964. Obliczyć wartość całki

$$\int_0^1 \frac{12x - 4}{(x + 2)(4x + 1)} \, dx.$$

Sprowadzić wynik do prostej postaci i określić, czy jest on liczbą dodatnią, ujemną, czy zerem.

965. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_0^1 \frac{x^2 + 4x + 5}{x^3 + x^2 + x + 1} \, dx.$$

966. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_{-1}^2 \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} \, dx.$$

967. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x^3 + 8x^2 + 25x}.$$

968. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x+6}}.$$

969. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int x^2 \cdot \sin \sqrt{x^3+1} dx.$$

970. Obliczyć długość krzywej

$$\left\{ \left(x, \frac{x^2}{8} - \ln x \right) : 1 \leq x \leq e \right\}.$$

Zastąpić ? odpowiednim znakiem nierówności i udowodnić podane nierówności przy podanych warunkach:

$$\mathbf{971.} \quad x_i \in [0, \frac{1}{4}] \wedge \sum_{i=1}^{81} x_i = 9 \Rightarrow \sum_{i=1}^{81} (\sqrt{x_i} + x_i^2) ? 28$$

$$\mathbf{972.} \quad x_i \in [\frac{1}{4}, 1] \wedge \sum_{i=1}^{81} x_i = 36 \Rightarrow \sum_{i=1}^{81} (\sqrt{x_i} + x_i^2) ? 70$$

$$\mathbf{973.} \quad x_i \geq 0 \wedge \sum_{i=1}^{2000} x_i = 2000 \Rightarrow \sum_{i=1}^{2000} \arctg x_i ? 500\pi$$

$$\mathbf{974.} \quad a, b, c > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} ? \frac{9}{a+b+c}$$

$$\mathbf{975.} \quad a, b, c, d > 0 \wedge a+b+c+d=2 \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} ? 16$$

$$\mathbf{976.} \quad a, b, c, d > 0 \wedge a+b+c+d=1 \Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} ? 2$$

$$\mathbf{977.} \quad x_i \geq 0 \wedge \sum_{i=1}^n x_i = n \Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2 + x_i + 1} ? \frac{n}{3}$$

$$\mathbf{978.} \quad x, y, z \geq 0 \wedge x+y+z=\pi \Rightarrow \sin x + \sin y + \sin z ? \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\mathbf{979.} \quad x, y, z \geq 0 \wedge x+y+z=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin x + \sin y + \sin z ? \frac{3}{2}$$

$$\mathbf{980.} \quad x, y, z, t \geq 0 \wedge x+y+z+t=4 \Rightarrow \frac{e^x}{x} + \frac{e^y}{y} + \frac{e^z}{z} + \frac{e^t}{t} ? 4e$$

$$\mathbf{981.} \quad x, y, z \geq 0 \wedge \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{\sqrt{y}}{3} + \frac{\sqrt{z}}{6} ? 1$$

$$\mathbf{982.} \quad \frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \frac{x_4}{4} = 1 \Rightarrow \frac{x_1^2}{1} + \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_3^2}{3} + \frac{x_4^2}{4} ? \frac{12}{25}$$

$$\mathbf{983.} \quad \sum_{i=1}^n x_i = n \Rightarrow \sum_{i=1}^n e^{x_i} ? ne \quad \mathbf{984.} \quad x_i < \frac{1}{2} \wedge \sum_{i=1}^n x_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n e^{x_i} ? n + \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$\mathbf{985.} \quad x_i > -\frac{1}{3} \wedge \sum_{i=1}^n x_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n e^{2x_i} ? n + \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$\mathbf{986.} \quad x_i \geq 1 \wedge \sum_{i=1}^n x_i = 2n \Rightarrow \prod_{i=1}^n (1 + x_i^2) ? 5^n$$

987. $-1 \leq x_i \leq 1 \wedge \sum_{i=1}^n x_i = \frac{n}{2} \Rightarrow \prod_{i=1}^n (1+x_i^2) \leq \frac{5^n}{4^n}$

988. Czy w zadaniu 986 można zastąpić $x_i \geq 1$ warunkiem $|x_i| \geq 1$?

Która z liczb jest większa

989.

$$995^{995} \cdot 996^{996} \cdot 997^{997} \cdot 998^{998} \cdot 999^{999} \cdot 1000^{1000} \cdot 1001^{1001} \cdot 1002^{1002} \cdot 1003^{1003} \cdot 1004^{1004} \cdot 1005^{1005} \text{ czy } 10^{33000} ?$$

990.

$$995^{1005} \cdot 996^{1004} \cdot 997^{1003} \cdot 998^{1002} \cdot 999^{1001} \cdot 1000^{1000} \cdot 1001^{999} \cdot 1002^{998} \cdot 1003^{997} \cdot 1004^{996} \cdot 1005^{995} \text{ czy } 10^{33000} ?$$

991.

$$995^{995} + 996^{996} + 997^{997} + 998^{998} + 999^{999} + 1000^{1000} + 1001^{1001} + 1002^{1002} + 1003^{1003} + 1004^{1004} + 1005^{1005} \text{ czy } 11 \cdot 10^{3000} ?$$

992.

$$995^{1005} + 996^{1004} + 997^{1003} + 998^{1002} + 999^{1001} + 1000^{1000} + 1001^{999} + 1002^{998} + 1003^{997} + 1004^{996} + 1005^{995} \text{ czy } 11 \cdot 10^{3000} ?$$

993.

$$995^{2995} \cdot 996^{2996} \cdot 997^{2997} \cdot 998^{2998} \cdot 999^{2999} \cdot 1000^{3000} \cdot 1001^{3001} \cdot 1002^{3002} \cdot 1003^{3003} \cdot 1004^{3004} \cdot 1005^{3005} \text{ czy } 10^{99000} ?$$

994. Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^p \cdot \left(\sqrt{\sqrt{n} + \sqrt{1}} + \sqrt{\sqrt{n} + \sqrt{2}} + \sqrt{\sqrt{n} + \sqrt{3}} + \sqrt{\sqrt{n} + \sqrt{4}} + \dots + \sqrt{\sqrt{n} + \sqrt{n}} \right) \right)$$

dla tak dobranej wartości parametru rzeczywistego p , aby granica ta była dodatnia i skończona.

Doprowadzić wynik do postaci $\frac{a}{b} \cdot (\sqrt{c} + d)$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{N}$.

995. Wyznaczyć wszystkie wartości rzeczywiste parametru p , dla których całka niewłaściwa

$$\int_0^{\infty} \frac{x^p}{x^8 + 1} dx$$

jest zbieżna.

996. Wskazać (wraz z dowodem poprawności) wartość rzeczywistą parametru $p \neq 1$, dla której

$$\int_0^{\infty} \frac{x^p}{x^8 + 1} dx = \int_0^{\infty} \frac{x}{x^8 + 1} dx.$$

997. Obliczyć

$$\frac{\int_0^{\infty} \frac{x^4}{x^8+1} dx}{\int_0^{\infty} \frac{x^4}{2x^8+1} dx}.$$

998. Wyznaczyć szereg Fouriera funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, okresowej o okresie 2π , określonej wzorem

$$f(x) = \cos \frac{3}{2}x$$

dla $x \in [-\pi, \pi)$.

999. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 9}.$$

Wskazówka 1: Wstawić $x = 0$ do szeregu Fouriera funkcji z zadania 998.

Wskazówka 2: Wstawić $x = \pi$ do szeregu Fouriera funkcji z zadania 998.

Wskazówka 3: Zastosować równość Parsevala do funkcji z zadania 998.

Wskazówka 4: Nie używać szeregów Fouriera, tylko zapisać wyraz szeregu w postaci różnicy odpowiednich wyrażeń.

Uwaga: Dwie z powyższych wskazówek prowadzą do rozwiązania, a dwie w maliny.

1000. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję f określoną wzorem

$$f(x) = \cos^5 x \cdot \sin 3x.$$

1001. Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = \sup(\{0\} \cup \{1 - |2^n x - 4^n| : n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}\}).$$

Obliczyć

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

1002. Obliczyć

$$\int_1^7 \frac{dx}{e^x + e^4}$$

podając wynik w postaci k/e^n , gdzie $k, n \in \mathbb{N}$.

1003. Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1^{11} + 2^{11} + 3^{11} + 4^{11} + \dots + n^{11})^3}{(1^{17} + 2^{17} + 3^{17} + 4^{17} + \dots + n^{17})^2}$$

podając wynik w postaci ułamka nieskracalnego.