

Liczby rzeczywiste, liczby wymierne i niewymierne.

Wykład: zad. 41-43

Konwersatorium 15.10.2009: zad. 39-40

Ćwiczenia 14.10.2009: zad. 50-59

Kolokwium nr 2, 20.10.2009: materiał z zad. 1-59

41. Dowieść, że nie istnieje liczba wymierna dodatnia, której kwadrat jest równy 2.**42.** Czy liczba $0,(9) = 0,999999\dots$ jest wymierna czy niewymierna?**43.** Niech

$$x = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + \dots$$

Wówczas

$$\begin{aligned} x &= 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 9 + 3 \cdot 27 + 3 \cdot 81 + 3 \cdot 243 + \dots = \\ &= 1 + 3 \cdot (1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + \dots) = 1 + 3x, \end{aligned}$$

skąd $x = -1/2$.

Jak to możliwe, że suma liczb całkowitych dodatnich jest ujemna i niecałkowita?

Zadania 44-48 to proste zadanka rachunkowe. Na ćwiczeniach prawdopodobnie wystarczy tylko porównać wyniki.

44. Przedstawić liczbę $0,123(45)$ w postaci ułamka zwykłego.**45.** Przedstawić liczbę $0,1(270)$ w postaci ułamka zwykłego.

Obliczyć podając wynik w postaci ułamka zwykłego

46. $\sqrt{0,(4)} + \sqrt[3]{3,374(9)}$

47. $(0,2(9) + 1,(09)) \cdot 12,(2)$

48. $(0,(037))^{0,(3)}$

Przykład **49.** Dowieść, że liczba $\log_2 3$ jest niewymierna.*Rozwiązanie:*Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_2 3$ jest wymierna i niech m/n będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\log_2 3 = \frac{m}{n}$$

$$2^{m/n} = 3$$

$$2^m = 3^n.$$

Ta ostatnia równość nie jest jednak możliwa, gdyż liczba 2^m jest parzysta, a liczba 3^n nieparzysta. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_2 3$ nie jest liczbą wymierną.**50.** Dowieść, że liczba $\log_{12} 18$ jest niewymierna.**51.** Dowieść, że liczba $\sqrt{15}$ jest niewymierna.

52. Dowieść, że liczba $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ jest niewymierna.

53. Dowieść, że liczba $\sqrt{\log_4 25}$ jest niewymierna.

54. Dowieść, że liczba $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$ jest niewymierna.

55. Rozstrzygnąć, czy liczba $\log_2 3 + \log_4 5$ jest wymierna, czy niewymierna.

56. Dowieść, że liczba $\sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$ jest niewymierna.

OSZUSTWO 57.

ZADANIE: Dowieść, że liczba $\sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2}$ jest niewymierna.

Rozwiązanie I:

Liczba $-\sqrt{2}$ jest niewymierna. Także liczba $\sqrt{3 - \sqrt{8}}$ jest niewymierna, bo gdyby była wymierna, to jej kwadrat $3 - \sqrt{8}$ też byłby liczbą wymierną, a nie jest. Zatem liczba $\sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2}$ jest niewymierna jako suma liczb niewymiernych.

Rozwiązanie II:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2}$ jest wymierna i oznaczmy ją przez w . Wtedy

$$w = \sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2}$$

$$w + \sqrt{2} = \sqrt{3 - \sqrt{8}}$$

$$w^2 + 2\sqrt{2}w + 2 = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2}(w + 1) + (w - 1)(w + 1) = 0$$

Dzieląc ostatnią równość przez $w + 1$ otrzymujemy

$$2\sqrt{2} + w - 1 = 0,$$

co stanowi sprzeczność z założeniem wymierności liczby w , gdyż lewa strona równości jest liczbą niewymierną i nie może być równa 0.

Czy powyższe rozwiązania są poprawne?

58. Dowieść, że nie istnieje liczba wymierna q spełniająca równość

$$q^q = 5.$$

59. Chcemy zlokalizować położenie względem liczb wymiernych, liczby rzeczywistej $q > 1$ spełniającej równanie z poprzedniego zadania. Dla dowolnej liczby wymiernej postaci m/n , gdzie m jest liczbą całkowitą, a n liczbą naturalną, zapisać warunki $m/n < q$ oraz $m/n > q$ używając tylko liczb m , n , działań na liczbach całkowitych, znaków nierówności i ewentualnie symboli logicznych.

Wykorzystać te warunki do porównania liczby q z liczbami $5/2$ oraz $25/12$ (bez użycia kalkulatora, korzystając z nierówności typu: $25 < 27$, $125 < 128$).