Nierówności.

Ćwiczenia 21,28.10.2009: zad. 60-89 Kolokwium nr 3, 27.10.2009: materiał z zad. 1-74

Konwersatorium 22,29.10.2009: zad. 90-94 Kolokwium nr 4, 3.11.2009: materiał z zad. 1-94

60. Która z liczb jest większa

a) $2^{1000!}$ czy $999^{999!}$?

b) 26^{99} czy 10^{151} ?

c) 26^{99} czy 123^{65} ?

d) $\prod_{i=2}^{2009}\prod_{j=1}^{i-1}\left(\sqrt[j]{j}-\sqrt[i]{i}\right)$ czy $10^{-1000000}$?

Uwaga: Zgodnie z obowiązującą konwencją, w napisie typu a^{b^c} potęgowanie wykonuje się *od góry*, tzn.

$$a^{b^c}=a^{(b^c)}\,.$$

61. Uprościć wyrażenie

$$\left(3^{2^n}-2^{2^m}\right)\cdot\prod_{i=0}^{37}\left(3^{2^{n+i}}+2^{2^{m+i}}\right),$$

gdzie

$$\prod_{i=j}^{k}a_i=a_j\cdot a_{j+1}\cdot a_{j+2}\ldots a_k\,.$$

62. Niech $a=\sqrt[4]{2}$. Która z liczb jest większa

$$a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{16}}}}}}}}}}}}}}}} \qquad \text{czy} \qquad 10^{10^{10}}\ ?$$

Pomoc dla osób dostających oczopląsu: liczba a występuje w pierwszym wyrażeniu 16 razy.

63. Niech $a=\sqrt[16]{2}$. Która z liczb jest większa

$$a^{256} \qquad \text{czy} \qquad 256^a\ ?$$

64. Uporządkować następujące liczby w kolejności rosnącej

$$a=\left(5-\sqrt{37}\right)^{2008}$$

$$b=\left(6-\sqrt{37}\right)^{2009}$$

$$c=\left(7-\sqrt{73}\right)^{2011}$$

$$d=\left(9-\sqrt{73}\right)^{2013}$$

65. Która z liczb jest większa $2^{2^{2^{1001}}}$ czy $1000^{2^{2^{1000}}}$?

66. Która z liczb jest większa $\left(\frac{9}{4}\right)^{9/4}$ czy 6 ?

W rozwiązaniu wolno korzystać z własności potęgowania, wolno wykonywać obliczenia na liczbach naturalnych mniejszych od 100 oraz wolno wykorzystać równości $2^{11}=2048$ i $3^7=2187$.

67. Która z liczb jest większa $\sqrt[10]{10}$ czy 1,25 ?

W rozwiązaniu wolno korzystać z własności potęgowania oraz wolno wykonywać obliczenia na liczbach naturalnych mniejszych od 200.

68. Która z liczb jest większa $\sqrt[45]{45}$ czy 1,08 ?

W rozwiązaniu wolno korzystać z własności potęgowania, wolno wykonywać obliczenia na liczbach naturalnych mniejszych od 200 oraz wolno wykorzystać równości $3^{19}=1\,162\,261\,467$ i $5^{13}=1\,220\,703\,125$.

69. Która z liczb jest większa 45^{13} czy 2^{72} ?

W rozwiązaniu wolno korzystać z własności potęgowania oraz wolno wykonywać obliczenia na liczbach naturalnych mniejszych od 300.

70. Wskazać taką liczbę naturalną n, że

$$n^{1000000}+1<2^n\,.$$

71. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant$ .... zachodzi nierówność

$$n^{32} \leqslant 2^n .$$

W miejsce kropek wstaw dowolną liczbę, dla której umiesz przeprowadzić dowód.

Następnie zastanów się nad modyfikacją dowodu tak, aby zmniejszyć liczbę wpisaną w miejsce kropek.

Wskazując odpowiednią liczbę całkowitą k udowodnić nierówności $10^k < L < 10^{2k}$.

72. $L = 3972^{257}$ **73.** $L = 257^{3972}$ **74.** $L = 700!$

Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C, D udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności $C < W(n) < D$.

75. $W(n) = \dfrac{n^4+16n+3}{2n^4+7n^2}$ **76.** $W(n) = \dfrac{13n^2-10n+3}{2n^2+7n-1}$ **77.** $W(n) = \dfrac{\sqrt{n+7}+3}{\sqrt{n+3}+7}$

78. $W(n) = \dfrac{7^n+6^n+2^n}{7^n+5^n+3^n}$ **79.** $W(n) = \sqrt{n^2+n}-n$ **80.** $W(n) = \sqrt[3]{n^3+n^2}-n$

Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C, D oraz liczbę rzeczywistą k udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \cdot n^k < W(n) < D \cdot n^k .$$

81. $W(n) = \dfrac{n^7+10n^3+3}{n^4+37}$ **82.** $W(n) = \dfrac{5n^8-n^4+3}{5n^{10}-4}$ **83.** $W(n) = \dfrac{n^6+2n^4+1}{\sqrt{n}+2}$

84. $W(n) = \dfrac{n^3+2n^2+1}{\sqrt{n^6+2}+2}$ **85.** $W(n) = \dfrac{2n^3-n^2+1}{\sqrt[3]{n^2+1}+1}$ **86.** $W(n) = \dfrac{\sqrt[5]{n^2+1}}{\sqrt[7]{n^3+1}+1}$

Wskazując odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$1 - \frac{C}{n} < W(n) < 1 + \frac{C}{n} .$$

87. $W(n) = \dfrac{n^2+2n+3}{n^2+7n+2}$ **88.** $W(n) = \dfrac{3n^2-2n+3}{3n^2+7n-2}$ **89.** $W(n) = \dfrac{\sqrt{4n^2+1}}{2n+1}$

Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C, g udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$g - \frac{C}{n} < W(n) < g + \frac{C}{n} .$$

90. $W(n) = \dfrac{2n^2+2n+3}{3n^2+7n+2}$ **91.** $W(n) = \dfrac{4n^2-2n+3}{2n^2+7n-2}$ **92.** $W(n) = \dfrac{\sqrt{4n^2+1}}{3n+1}$

93. $W(n) = \sqrt{n^2+n}-n$ **94.** $W(n) = \sqrt[3]{n^3+n^2}-n$