

Uwaga: Zakres materiału podawany na liście zadań, to materiał, którego biegłego opanowania oczekuję na kolokwium. Oznacza to, że zdecydowana większość zadań będzie dotyczyć tego materiału i na ogół będzie punktowana standardowo. Można by rzec, że są to zadania, których umiejętności rozwiązania oczekuje od wszystkich. Zadań tych pojawi się na tyle dużo, aby na ich podstawie można było ze sporym zapasem uzyskać zaliczenie.

Czasami będą się jednak pojawiać też zadania wykraczające poza te ramy. Te zadania będą adresowane do lepszych studentów. Zadania te będą punktowane wyżej. Wymagać one będą wykazania się rzeczami dodatkowymi, drobnymi lub trochę grubszymi. Te dodatkowe rzeczy to mogą być np.:

- zapamiętanie czegoś z wykładu,
- wymyślenie samemu czegoś, co nie pojawiało się na wykładzie ani w zadaniach na liście,
- opanowanie zadań, które nie były jeszcze omawiane na ćwiczeniach, ale które mają oparcie w przykładach z wykładu.

Na ostatnim kolokwium zadanie nr 6 jest w zasadzie dość standardowe, jeżeli się założy, że ten materiał został wcześniej omówiony na ćwiczeniach. Gdyby pojawiło się ono tydzień później, powinno być warte 5 punktów. Ponieważ jednak pojawiło się ono *zaskoczenia*, punktacja za nie została podwyższona, natomiast zadanie 5 było zupełnie standardowe, aby dać szansę zdobycia punktów studentom słabszym - wystarczyło powtórzyć rozwiązanie zadania z listy z drobnymi zmianami.

Przykłady z wykładów 13,15,20.10.2009

95. Dla liczby wymiernej dodatniej $q = m/n$, gdzie $m, n \in \mathbb{N}$, zapisać warunek $\log_2 3 < q$. Wykorzystać też warunek do porównania $\log_2 3$ z liczbami $3/2$, $5/3$ oraz $8/5$.

96. Oszacować liczbę $1000!$ od góry i dołu przez potęgi dziesiątki.

97. Oszacować od góry i dołu wyrażenie

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \sqrt{n+3} + \dots + \sqrt{9n}.$$

98. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq \dots\dots\dots$ zachodzi nierówność

$$n^2 \leq 2^n.$$

W miejsce kropek wstawić liczbę, dla której udaje się łatwo zredagować dowód.

99. To samo dla nierówności

$$n^4 \leq 2^n.$$

100. To samo dla nierówności

$$n^8 \leq 2^n.$$

Zastanówić się nad modyfikacją dowodu tak, aby zmniejszyć liczbę wpisaną w miejsce kropek.

101. Wskazać liczbę naturalną $n > 1$ spełniającą nierówność

$$n^{1000} < 2^n.$$

Oszacować podane wyrażenia od góry i od dołu ($n \in \mathbb{N}$) przez wyrażenia różniące się stałym czynnikiem dodatnim (o ile nie podano inaczej)

- 102.** $\frac{n^4 + 2n^3 + n + 7}{4n^4 + n^2 + 15}$ **103.** $\frac{5n^3 - 2n + 3}{6n^3 - 4n^2 + 1}$ **104.** $\frac{n\sqrt{n+4} + 5}{\sqrt{n^3 + 4} + 1}$
- 105.** $\frac{2^n + 10n^2}{2^n + n^4}$ **106.** $\frac{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+3} + \dots + \sqrt{2n^2}}{2n+5}$ **107.** $\frac{n!}{n! + 10^n}$
- 108.** $\frac{n^6 + 5n + 4}{2n^3 - n^2 + 7}$ **109.** $\frac{\sqrt{n^7+9} + 6}{\sqrt[3]{n^4+15} + 8}$
- 110.** $\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \sqrt{n+3} + \dots + \sqrt{64n}}{\sqrt[3]{n+1} + \sqrt[3]{n+2} + \sqrt[3]{n+3} + \dots + \sqrt[3]{64n}}$
- 111.** $\frac{x}{x^2+1}$ (tylko od góry, $x \in \mathbb{R}$)
- 112.** $\frac{6x^7 - 5x^5 + 7}{5x^7 - 2x^4 + 3}$ ($x \in (0, +\infty)$)
- 113.** $\frac{n^5 + n^4 + 1}{2n^5 + n^3 + 5}$ (szacowanie postaci $g \pm C/n$)
- 114.** $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}$
- 115.** $\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \frac{n}{n^2+3} + \dots + \frac{n}{n^2+n}$ (szacowanie postaci $g \pm C/n$)
- 116.** $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$ (szacowanie postaci $g \pm C/n$)
- 117.** Oszacować $\sqrt[n]{n}$.

Ciągi.

Ćwiczenia 4.11.2009: zad. 118-153

Kolokwium nr 5, 10.11.2009: materiał z zad. 1-153

Konwersatorium: zad. 154-169

Kolokwium nr 6, 17.11.2009: materiał z zad. 1-169

Trochę teorii

DEFINICJA: Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy g wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N |a_n - g| < \varepsilon.$$

Piszemy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$.

Ciąg (a_n) jest **rozbieżny** do $+\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall M \exists N \forall n \geq N a_n > M.$$

Piszemy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

Ciąg (a_n) jest **rozbieżny** do $-\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall M \exists N \forall n \geq N \quad a_n < M.$$

Piszemy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

TWIERDZENIA:

1. CIĄG ZBIEŻNY MA TYLKO JEDNĄ GRANICĘ.

2. GRANICA SUMY JEST SUMĄ GRANIC.

Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, to ciąg $(a_n + b_n)$ jest zbieżny i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

3. GRANICA RÓŻNICY JEST RÓŻNICĄ GRANIC.

Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, to ciąg $(a_n - b_n)$ jest zbieżny i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

4. GRANICA ILOCZYNU JEST ILOCZYNEM GRANIC.

Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, to ciąg $(a_n b_n)$ jest zbieżny i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

5. GRANICA ILORAZU JEST ILORAZEM GRANIC.

Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, przy czym $b_n \neq 0$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$, to ciąg $(\frac{a_n}{b_n})$ jest zbieżny i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}.$$

6. ZBIEŻNOŚĆ I GRANICA NIE ZALEŻĄ OD POMINIĘCIA LUB ZMIANY SKOŃCZENIE WIELU POCZĄTKOWYCH WYRAZÓW CIĄGU.

7. SŁABE NIERÓWNOŚCI ZACHOWUJĄ SIĘ PRZY PRZEJŚCIU DO GRANICY.

Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, przy czym $a_n \leq b_n$ (odpowiednio $a_n \geq b_n$), to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ (odpowiednio $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$).

8. KILKA PODSTAWOWYCH GRANIC.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a = a$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = +\infty \text{ dla } a > 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0 \text{ dla } |a| < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \text{ nie istnieje nawet w sensie granicy niewłaściwej}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \text{ dla } a > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

9. Z GRANICĄ MOŻNA WCHODZIĆ POD PIERWIASTEK.

Dokładniej, jeśli ciąg (a_n) jest zbieżny, przy czym $a_n \geq 0$, to dla $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}.$$

10. TWIERDZENIE O TRZECH CIĄGACH.

Jeżeli ciągi (a_n) , (b_n) , (c_n) spełniają warunek

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

oraz ciągi (a_n) i (c_n) są zbieżne do tej samej granicy g , to ciąg (b_n) też jest zbieżny i jego granicą jest g .

11. KRYTERIUM D'ALEMBERTA.

Jeżeli (a_n) jest ciągiem o wyrazach niezerowych oraz istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g < 1,$$

to ciąg (a_n) jest zbieżny do zera.

Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g > 1,$$

to ciąg (a_n) jest rozbieżny, a ciąg $(|a_n|)$ jest rozbieżny do $+\infty$.

Uwaga: Podstawowym zastosowaniem kryterium d'Alemberta jest badanie zbieżności szeregów, ale podana wyżej wersja stosuje się do badania zbieżności ciągów. O szeregach będzie mowa za kilka tygodni.

Powyższe własności zachowują się w przypadku ciągów mających granice niewłaściwe (tzn. rozbieżnych do $\pm\infty$), o ile nie prowadzi to do wyrażen nieoznaczonych.

12. SZTUCZKI OPARTE NA WZORACH SKRÓCONEGO MNOŻENIA.

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \frac{x - y}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}$$

Zadania

Wyjaśnić, dlaczego poniżej są same **BZDURY**:

$$118. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = 0 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = 0$$

$$119. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty - \infty = 0$$

$$120. \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = \begin{cases} -1 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ 1 & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$$

$$121. \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{n} = k \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = k \cdot 0 = 0$$

Zbadać zbieżność ciągu (a_n) określonego podanym wzorem; obliczyć granice ciągów zbieżnych, rozstrzygnąć czy ciągi rozbieżne mają granicę niewłaściwą

$$122. \frac{n}{n+7} \quad 123. 2^n - \frac{1}{n} \quad 124. \frac{4n^2+3n}{n+1} \quad 125. \frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+2} \quad 126. \frac{5n^3+n^2-6}{3n^4+7}$$

$$127. \frac{5n^4+n^2-6}{3n^4+7} \quad 128. \frac{5n^5+n^2-6}{3n^4+7} \quad 129. \frac{1-2+3-4+5-6+\dots-2n}{\sqrt{n^2+2}}$$

$$130. \frac{1+2+4+\dots+2^n}{1+3+9+\dots+3^n} \quad 131. \frac{n}{1+\sqrt{n}} \quad 132. n \cdot (-1)^n \quad 133. \frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^7}{n^3(1+7\sqrt{n+2})}$$

$$134. \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2} \quad 135. \frac{3^0+3^1+3^2+3^3+\dots+3^n}{3^n} \quad 136. \frac{\sqrt{3^n+2^n}}{\sqrt{3^n+1}} \quad 137. \sqrt[n]{n}$$

$$138. \sqrt[n]{n^2} \quad 139. \sqrt[n]{n+17} \quad 140. \sqrt{n^2+3n}-n \quad 141. n(\sqrt{n^2+7}-n)$$

$$142. \frac{7n+(\sqrt[3]{n}\sqrt[6]{n})^5\sqrt{9n+1}}{11n^3+7n+3} \quad 143. \frac{(-1)^n}{n} \quad 144. \frac{1}{(2+(-1)^n)^n}$$

$$145. a_n = \begin{cases} (-1)^n \cdot n! & \text{dla } n \leq 100 \\ \frac{2^n}{2^n+n} & \text{dla } n > 100 \end{cases} \quad 146. \frac{n^2+1}{n^3+1} + \frac{n^2+2}{n^3+2} + \frac{n^2+3}{n^3+3} + \dots + \frac{n^2+n}{n^3+n}$$

$$147. \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2} \quad 148. \frac{n^7}{7^n} \quad 149. \frac{10^n}{n!} \quad 150. \frac{n!}{n^{22}}$$

$$151. \frac{\sqrt{3^n+n^2}}{\sqrt{3^n+2^n+1}} \quad 152. \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+7}-\sqrt{n}} \quad 153. \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{(\sqrt{n^2+n+1}-n)^2}$$

154. Ciąg (a_n) spełnia warunek

$$\forall_{n>1000} |a_n - 100| < 10.$$

Czy stąd wynika, że

- a) ciąg (a_n) jest zbieżny,
- b) ciąg (a_n) jest rozbieżny,
- c) każdy wyraz ciągu (a_n) jest dodatni,
- d) ciąg (a_n) ma co najmniej jeden wyraz dodatni,
- e) od pewnego miejsca wszystkie wyrazy ciągu są dodatnie,
- f) $a_{666} < 7777777$,
- g) $a_{1111} > 88$,

- h) $\forall_{n>1729} |a_n - 100| < 1$,
 i) $\forall_{n>345} |a_n - 100| < 17$,
 j) $\forall_{n>5555} |a_n - 99| < 13$,
 k) ciąg (a_n) jest ograniczony,
 l) $\exists_{n>444} |a_n - 95| < 37$,
 m) $\exists_{n>4444} |a_n - 80| < 37$,
 n) $\exists_{n<444} |a_n - 95| < 37$,
 o) $\exists_{n<4444} |a_n - 80| < 37$,
 p) $\forall_m \exists_{n>m} a_n > 0$,
 q) $\forall_{n>1331} |a_n - 66| > 12$,
 r) $\forall_{m>1234} \forall_{n>5678} |a_n - a_m| < 7$,
 s) $\forall_{m>1234} \forall_{n>5678} |a_n - a_m| < 17$,
 t) $\forall_{m>123} \forall_{n>45678} |a_n - a_m| < 27$,
 u) $\forall_{m>1234} \forall_{n>5678} |a_n - a_m| < 37$,
 v) $\exists_{m<123} \exists_{n<456} |a_n - a_m| < 3$,
 w) $\forall_{m>12345} \forall_{n>67890} |a_n + a_m| < 210$,
 x) $\forall_{m>1296} \forall_{n>7776} |a_n + a_m| < 222$,
 y) $\forall_{m>1024} \forall_{n>8192} |a_n + a_m| > 128$,
 z) $\exists_n a_n < 92$,
 ż) $\exists_n a_n > 91$.

155. Dany jest taki ciąg (a_n) , że

$$\forall_{\varepsilon>0} \quad \forall_{n \geq 5/\varepsilon} |a_n - 7| < \varepsilon.$$

Podać granicę ciągu (a_n) .

Wskazać taką liczbę M , że $\forall_n |a_n| < M$.

Wskazać taką liczbę N , że $\forall_{n \geq N} a_n > 6$.

Wskazać taką liczbę N , że $\forall_{n \geq N} a_n < 7,01$.

Wskazać taką liczbę N , że $\forall_{n \geq N} |a_n - 8| > 1/3$.

156. Dany jest taki ciąg (b_n) , że

$$\forall_{\varepsilon>0} \quad \forall_{n \geq 10/\varepsilon} |b_n + 2| < \varepsilon.$$

Podać granicę ciągu (b_n) .

Wskazać taką liczbę M , że $\forall_n |b_n| < M$.

Wskazać taką liczbę N , że $\forall_{n \geq N} b_n < 0$.

Wskazać taką liczbę N , że $\forall_{n \geq N} b_n > -3$.

Wskazać taką liczbę N , że $\forall_{n \geq N} |b_n - 2| > 1/10$.

157. Niech $c_n = a_n + b_n$, gdzie (a_n) i (b_n) są ciągami z poprzednich dwóch zadań. Dowieść, że wówczas ciąg (c_n) jest zbieżny, gdyż

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \forall_{n \geq \dots\dots\dots/\varepsilon} |c_n - 5| < \varepsilon.$$

W miejscu kropek powinna się znaleźć odpowiednio dobrana liczba.

158. Niech $d_n = a_n \cdot b_n$, gdzie (a_n) i (b_n) są jak poprzednio. Dowieść, że wówczas ciąg (d_n) jest zbieżny, gdyż

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \forall_{n \geq \dots\dots\dots} |d_n + 14| < \varepsilon.$$

W miejscu kropek powinno się znaleźć odpowiednio dobrane wyrażenie zależne od ε .

159. Niech $e_n = 2a_n + 3b_n$. Dowieść, że wówczas ciąg (e_n) jest zbieżny, gdyż

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \forall_{n \geq \dots\dots\dots/\varepsilon} |e_n - \dots\dots| < \varepsilon.$$

W miejscu kropek powinny się znaleźć odpowiednio dobrane liczby.

PRAWDA CZY FAŁSZ?

160. Jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) są rozbieżne, to ciąg $(a_n + b_n)$ jest rozbieżny.

161. Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, a ciąg (b_n) rozbieżny, to ciąg $(a_n + b_n)$ jest rozbieżny.

162. Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, a ciąg (b_n) rozbieżny, to ciąg $(a_n b_n)$ jest rozbieżny.

163. Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, ciąg (b_n) rozbieżny, a ponadto obydwa ciągi mają tylko wyrazy dodatnie, to ciąg $(a_n b_n)$ jest rozbieżny.

164. Jeżeli (a_n) jest ciągiem zbieżnym o wyrazach dodatnich, to jego granica jest liczbą dodatnią.

165. Jeżeli $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \frac{1}{2}$, to $a_n \rightarrow \frac{1}{2}$.

166. Jeżeli ciąg $(\frac{a_{n+1}}{a_n})$ jest zbieżny, to ciąg (a_n) jest zbieżny.

167. Jeżeli ciąg (a_n^2) jest zbieżny, to ciąg (a_n) jest zbieżny.

168. Jeżeli wśród wyrazów ciągu (a_n) występują zarówno wyrazy dodatnie jak i ujemne, to ciąg (a_n) jest rozbieżny.

169. Jeżeli wśród wyrazów ciągu (a_n) występują zarówno wyrazy mniejsze od 1 jak i większe od 3, to ciąg (a_n) jest rozbieżny.