

**Kresy zbiorów.**Ćwiczenia 18.11.2009<sup>1</sup>: zad. 170-202

Kolokwium nr 7, 24.11.2009: materiał z zad. 1-220

**Definicja:** Zbiór  $Z \subset \mathbb{R}$  nazywamy ograniczonym z góry, jeżeli

$$\exists_{M \in \mathbb{R}} \quad \forall_{x \in Z} \quad x \leq M.$$

Każdą liczbę rzeczywistą  $M \in \mathbb{R}$  spełniającą warunek

$$\forall_{x \in Z} \quad x \leq M$$

nazywamy ograniczeniem górnym zbioru  $Z$ .**Definicja:** Zbiór  $Z \subset \mathbb{R}$  nazywamy ograniczonym z dołu, jeżeli

$$\exists_{M \in \mathbb{R}} \quad \forall_{x \in Z} \quad x \geq M.$$

Każdą liczbę rzeczywistą  $M \in \mathbb{R}$  spełniającą warunek

$$\forall_{x \in Z} \quad x \geq M$$

nazywamy ograniczeniem dolnym zbioru  $Z$ .**Definicja:** Zbiór  $Z \subset \mathbb{R}$  nazywamy ograniczonym, jeżeli jest jednocześnie ograniczony z dołu i z góry.**Definicja:** Jeżeli niepusty zbiór  $Z \subset \mathbb{R}$  jest ograniczony z góry, to kresem górnym zbioru  $Z$  nazywamy jego najmniejsze ograniczenie górne i stosujemy oznaczenie  $\sup Z$ . Istnienie takiego najmniejszego ograniczenia wynika z zasady ciągłości Dedekinda. Jeżeli zbiór  $Z$  jest nieograniczony z góry, przyjmujemy  $\sup Z = +\infty$ . Ponadto przyjmujemy  $\sup \emptyset = -\infty$ . Analogicznie określamy kres dolny zbioru, oznaczany przez  $\inf Z$ .**Wniosek:** Jeżeli niepusty zbiór  $Z \subset \mathbb{R}$  jest ograniczony z góry, to liczba  $G$  jest jego kresem górnym wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{x \in Z} \quad x \leq G$$

oraz

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{x \in Z} \quad x > G - \varepsilon.$$

**Zadania.**

Wyznaczyć kres górny i dolny następujących zbiorów. Zbadać, czy podane zbiory zawierają swoje kresy:

$$170. \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\} \quad 171. \left\{ \frac{37^n}{n!} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

---

<sup>1</sup>W grupach, w których odbywają się ćwiczenia w poniedziałek 16 listopada, przeznaczyć na omówienie listy także dodatkowe ćwiczenia poniedziałkowe.

$$\begin{array}{ll}
 172. \left\{ \frac{1}{m} - \frac{n}{n+1} : m, n \in \mathbb{N} \right\} & 173. \{x \in \mathbb{R} : x^4 \geq 5\} \\
 174. \left\{ \frac{m^2 + n^2}{2mn} : m, n \in \mathbb{N}, m < n \right\} & 175. \left\{ \frac{mnk}{m^3 + n^3 + k^3} : m, n, k \in \mathbb{N} \right\}
 \end{array}$$

Niech  $A$  i  $B$  będą niepustymi ograniczonymi zbiorami liczb rzeczywistych. Niech  $a_1 = \inf A$ ,  $a_2 = \sup A$ ,  $b_1 = \inf B$ ,  $b_2 = \sup B$ . Co można powiedzieć o następujących kresach:

$$176. \inf\{-a : a \in A\} \quad 177. \sup\{a^2 : a \in A\} \quad 178. \inf\{a^2 : a \in A\}$$

$$179. \sup\{a-b : a \in A, b \in B\} \quad 180. \sup\{ab : a \in A, b \in B\}$$

$$181. \inf\{ab : a \in A, b \in B\}$$

**182.** Zbiory  $A$  i  $B$  są niepuste i ograniczone. Zbiór  $B$  jest skończony i wszystkie jego elementy są różne od 0. Czy zbiór  $\{\frac{a}{b} : a \in A, b \in B\}$  musi być ograniczony? Odpowiedź uzasadnić.

**183.**  $A$  jest takim niepustym zbiorem ograniczonym liczb rzeczywistych, że  $\inf A = -3$ ,  $\sup A = 2$ . Jakie wartości mogą przyjmować kresy zbioru  $\{|a| : a \in A\}$ ? Odpowiedź uzasadnić przykładem lub dowodem.

**184.** Podać przykład takich zbiorów  $A, B$ , że  $\inf A = 2$ ,  $\sup A = 7$ ,  $\inf B = 3$ ,  $\sup B = 10$ ,  $\inf(A \cap B) = 4$ ,  $\sup(A \cap B) = 6$ ,  $A \cap \mathbb{N} = B \cap \mathbb{N} = \emptyset$ .

### Niepotrzebne skreślić.

W każdej parze ramek tylko jedna zawiera sensowne uzupełnienie tekstu matematycznego.

**Twierdzenie 185.** Niech  $A$  i  $B$  będą niepustymi zbiorami ograniczonymi. Niech  $C = \{a-b : a \in A \wedge b \in B\}$ . Wtedy  $\inf C = \boxed{\inf A - \sup B} \boxed{\sup B - \inf A}$ .

*Dowód:*

Niech  $d = \inf A$  i  $g = \sup B$ . Wtedy z warunku  $d = \inf A$  wynika, że

$$(1) \quad \boxed{\forall_{a \in A}} \boxed{\exists_{a \in A}} \boxed{a \leq d} \boxed{a \geq d}$$

oraz

$$(2) \quad \boxed{\forall_{\varepsilon > 0}} \boxed{\exists_{\varepsilon > 0}} \boxed{\forall_{a \in A}} \boxed{\exists_{a \in A}} \boxed{a < d + \varepsilon} \boxed{a > d - \varepsilon}.$$

Podobnie z warunku  $g = \sup B$  wynika

$$(3) \quad \boxed{\forall_{b \in B}} \boxed{\exists_{b \in B}} \boxed{b \leq g} \boxed{b \geq g}$$

oraz

$$(4) \quad \boxed{\forall_{\varepsilon > 0}} \boxed{\exists_{\varepsilon > 0}} \boxed{\forall_{b \in B}} \boxed{\exists_{b \in B}} \boxed{b < g + \varepsilon} \boxed{b > g - \varepsilon}.$$

Chcemy wykazać, że  $\inf C = e$ , gdzie  $e = \boxed{d - g} \boxed{g - d}$ , czyli, że

$$(5) \quad \boxed{\forall_{c \in C} \mid \exists_{c \in C}} \boxed{c \leq e \mid c \geq e}$$

oraz

$$(6) \quad \boxed{\forall_{\varepsilon > 0} \mid \exists_{\varepsilon > 0}} \boxed{\forall_{c \in C} \mid \exists_{c \in C}} \boxed{c < e + \varepsilon \mid c > e - \varepsilon}.$$

W dowodzie warunku (5) skorzystamy z (1) i (3).

Zakładając (5) wykażemy prawdziwość warunków (1) i (3).

Dowolna Istnieje liczba  $c \in C$  jest będąca postaci  $c = a - b$ , gdzie  $a \in A$  i  $b \in B$ . Z nierówności  $\boxed{a \leq d \mid a \geq d}$  i  $\boxed{b \leq g \mid b \geq g}$  otrzymujemy  $\boxed{a - b \leq e \mid a - b \geq e}$ , co dowodzi (5).

Założmy Wykażemy teraz prawdziwość warunku (6).

Niech  $\varepsilon$  będzie dowolną liczbą dodatnią. Wtedy

Znajdziemy taką liczbę dodatnią  $\varepsilon$ , dla której

istnieje  $a \in A$  takie, że  $\boxed{a > d - \varepsilon \mid a < d + \frac{\varepsilon}{2}}$  oraz  $b \in B$  takie, że  $\boxed{b < g + \varepsilon \mid b > g - \frac{\varepsilon}{2}}$ . Zatem liczba  $c = a - b$  spełnia nierówność  $\boxed{c < e + \varepsilon \mid c > e - \varepsilon}$ , co kończy dowód warunku (6).

Wyznaczyć kres górny i dolny następujących zbiorów. Zbadać, czy podane zbiory zawierają swoje kresy:

$$186. \left\{ x^2 : x \in (-4, 9) \right\} \quad 187. \left\{ \frac{n}{2n+3} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$188. \left\{ \frac{n!}{5^n} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad 189. \left\{ \binom{2009}{n} : n \in \mathbb{N} \wedge n \leq 2009 \right\}$$

$$190. \left\{ \frac{n}{n+m} : m, n \in \mathbb{N} \right\} \quad 191. \left\{ \left( \frac{1}{n} - \frac{2}{3} \right)^2 : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$192. \left\{ \sqrt{n^2 + n} - n : n \in \mathbb{N} \right\} \quad 193. \left\{ \sqrt[n]{3} - \sqrt[m]{2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$194. \left\{ \frac{7}{n} - 3m : m, n \in \mathbb{N} \right\} \quad 195. \left\{ \frac{m^2 + 4n^2}{mn} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$196. \left\{ \frac{m^2 + 5n^2}{mn} : m, n \in \mathbb{N} \right\} \quad 197. \left\{ \frac{3m^2 + 7n^2}{mn} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$198. \left\{ (\sqrt{37} - 5)^n : n \in \mathbb{N} \right\} \quad 199. \left\{ (\sqrt{37} - 6)^n : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$200. \left\{ (\sqrt{37} - 7)^n : n \in \mathbb{N} \right\} \quad 201. \left\{ (\sqrt{37} - 8)^n : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$202. \left\{ \frac{mn}{m^2 + n^2 + 1} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

**Konwersatorium 19.11.2009**

Przeczytaj poniższe warunki. Które z nich są równoważne temu, że  $g = \sup A$  ?

203.  $\left( \forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left( \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} a < g + \varepsilon \right)$
204.  $\left( \forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left( \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} |a - g| < \varepsilon \right)$
205.  $\left( \forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left( \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} a > g - 2\varepsilon \right)$
206.  $\left( \forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left( \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} a > g - \frac{\varepsilon}{2} \right)$
207.  $\left( \forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left( \forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{a \in A} a > g - \frac{1}{n} \right)$
208.  $\left( \forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left( \forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{a \in A} n^2(g - a) < \frac{1}{n} \right)$
209.  $\left( \forall_{a \in A} a < g \right) \wedge \left( \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} (a - g)^2 < \varepsilon \right)$
210.  $\left( \forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left( \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} (a - g)^2 < \varepsilon \right)$
211.  $\left( \forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left( \forall_{\varepsilon < g} \exists_{a \in A} a > \varepsilon \right)$
212.  $\left( \forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left( \forall_{\varepsilon < g} \exists_{a \in A} a > g - \varepsilon \right)$
213.  $\left( \forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left( \forall_{0 < \varepsilon < 1} \exists_{a \in A} a > g - \varepsilon \right)$
214.  $\left( \forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left( \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} a \geq g - \varepsilon \right)$
215.  $\left( \forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left( \forall_{\varepsilon \geq 0} \exists_{a \in A} a \geq g - \varepsilon \right)$
216.  $\left( \forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left( \forall_{\varepsilon \geq 0} \exists_{a \in A} a > g - \varepsilon \right)$
217.  $\left( \forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left( \forall_{a \in A} \exists_{b \in A} b \geq \frac{g+a}{2} \right)$
218.  $\left( \exists_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left( \forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left( \forall_{a \in A} \exists_{b \in A} b \geq \frac{g+a}{2} \right)$
219.  $\left( \exists_{a \in A} a^2 \geq 0 \right) \wedge \left( \forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left( \forall_{a \in A} \exists_{b \in A} b \geq \frac{g+a}{2} \right)$
220.  $\left( \exists_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left( \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} a > g - \varepsilon \right)$