

Ćwiczenia 25.11.2009: zad. 221-246

Kolokwium nr 8, 1.12.2009: materiał z zad. 1-246

Ćwiczenia 2.12.2009: zad. 247-267

Kolokwium nr 9, 8.12.2009: materiał z zad. 1-285

Szeregi liczbowe.

Obliczyć $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, a następnie znaleźć $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$:

221. $a_k = \frac{1}{7^k}$ **222.** $a_k = \frac{2^k + 5^k}{10^k}$

223. Dowieść, że $4 < \sum_{n=1}^{127} \frac{1}{n} < 7$.

224. Dowieść, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$ jest zbieżny, a jego suma jest mniejsza od 2.

Rozstrzygnąć, czy następujące szeregi są zbieżne

225. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$ **226.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$ **227.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{n^2 + 1}$ **228.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n-3)}$

229. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2 - 1}{n^3 + 6n^2 + 8n + 47}$ **230.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^{2n-1}}$

231. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}$ **232.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n}}$ **233.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}$

234. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$ **235.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ **236.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{3^n \cdot n!}$ **237.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

238. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)\sqrt{n+1}}$ **239.** $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}}$ **240.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

241. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$ **242.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4}$ **243.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + n} - n}$

244. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{\sqrt[10]{n!}}$ **245.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2^n}}$ **246.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + \pi}{n^\pi + e}$

Które z następujących szeregów są bezwzględnie zbieżne, które warunkowo zbieżne, a które rozbieżne:

247. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ **248.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 3^n}$ **249.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$

250. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n + 1}{n}$ **251.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+4)(n+9)}}$ **252.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{10^n}}{3^{2^n}}$

253. $1 - 1 + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \dots + 1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{k} - \dots - \frac{1}{k} + \dots$ (k razy)

254. $1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2} - \dots - \frac{1}{k^2} + \dots$ (k razy)

$$\begin{array}{lll}
255. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^3}{2^n} & 256. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \sqrt{n}} & 257. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{n^2}}{n!} \\
258. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 17}{3^n} & 259. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!+1}}{n!} & 260. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2}}{(n+3)^{1/4}} & 261. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)} (-1)^n \\
262. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) & 263. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n\sqrt{4^n+3^n}} & 264. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+5\sqrt{n}+27} \\
265. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{n!} & 266. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1/n}} & 267. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) (-1)^n
\end{array}$$

Kryteria zbieżności szeregów - co każdy student wiedzieć powinien.

1. WARUNEK KONIECZNY ZBIEŻNOŚCI.

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Innymi słowy, jeżeli ciąg (a_n) jest rozbieżny lub zbieżny do granicy różnej od zera, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

2. ZBIEŻNOŚĆ SZEREGU NIE ZALEŻY OD POMINIĘCIA LUB ZMIANY SKOŃCZENIE WIELU POCZĄTKOWYCH WYRAZÓW.

Oczywiście zmiana lub pominięcie tych wyrazów ma wpływ na sumę szeregu zbieżnego.

3. KRYTERIUM PORÓWNAWCZE.

Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ będą szeregami o wyrazach nieujemnych, przy czym dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $a_n \leq b_n$.

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, to $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

4. KILKA SZEREGÓW.

$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ jest zbieżny dla $|q| < 1$, rozbieżny dla pozostałych q .

$\sum_{n=1}^{\infty} n^a$ jest zbieżny dla $a < -1$, rozbieżny dla pozostałych a .

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^a n}$ jest zbieżny dla $a > 1$, rozbieżny dla pozostałych a . Logarytm ma dowolną podstawę większą od 1.

5. KRYTERIUM D'ALEMBERTA.

Jeżeli (a_n) jest ciągiem o wyrazach niezerowych oraz istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g < 1 ,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g > 1 ,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

6. ZBIEŻNOŚĆ BEZWZGLĘDNA.

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

7. SZEREGI NAPRZEMIENNE.

Jeżeli (a_n) jest ciągiem nierosnącym zbieżnym do 0, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(-1)^{n+1}$ jest zbieżny.

Konwersatorium 26.11.2009

Czy istnieje ciąg (a_n) taki, że (podać przykład lub dowieść, że nie istnieje) :

268. $a_n > \frac{1}{n}$ dla nieskończenie wielu n , $\forall_{n \in \mathbb{N}} a_n > 0$, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

269. $a_n = \frac{1}{2^n}$ dla nieskończenie wielu n , $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 10$.

270. $\forall_{n \in \mathbb{N}} a_{n^2} = \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$.

271. $\forall_{n \in \mathbb{N}} a_n \in \mathbb{Z}$, $a_n = n$ dla $n \leq 100$, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

272. $a_n = 1$ dla nieskończenie wielu n , szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

273. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ są rozbieżne.

274. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ jest zbieżny.

275. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ jest zbieżny, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

276. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum_{n=0}^{\infty} (a_{2^n} + a_{2^{n+1}} + a_{2^{n+2}} + \dots + a_{2^{n+1}-1})$ jest zbieżny, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

277. Szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ i $a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} + a_{2n+1})$ są zbieżne, ale mają różne sumy.
278. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest rozbieżny.
279. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest zbieżny.

Konwersatorium 3.12.2009

280. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a jego suma jest równa S . Czy stąd wynika, że zbieżny jest ciąg (a_n) , jeżeli

- a) $S = 0$ b) $0 < S < 1$ c) $S = 1$ d) $S > 1$

281. Czy możemy stwierdzić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest **rozbieżny**, jeżeli wiemy, że

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{4}$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{7}{4}$ c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{4}$ d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5}{4}$

282. Podać sumę szeregu, jeżeli szereg jest zbieżny.

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-6)^n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8^n}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{8^n}$

283. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n} \cdot n! \cdot a^n}{n^n}$$

w zależności od parametru rzeczywistego dodatniego a . Dla jednej wartości a można nie udzielić odpowiedzi.

284. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{(n+2)^n}.$$

285. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{(n+2)^{n+2}}.$$