

Ćwiczenia 13.01.2010: zad. 371-387

Kolokwium nr 14, 19.01.2010: materiał z zad. 1-396

Ćwiczenia 20.01.2010: zad. 397-419

Ćwiczenia 26.01.2010: pojawi się nowa lista zadań (**we wtorek są zajęcia środowe**)

Egzamin: piątek 29.01.2010, godz. 14.00-17.00, sale HS, EM

Egzamin poprawkowy: piątek 12.02.2010, godz. 9.00-12.00, sala HS

Szeregi potęgowe.

Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\begin{array}{llll}
371. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{n^{10}} & 372. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 10^{n-1}} & 373. \sum_{n=0}^{\infty} 50^n x^{2n+5} & 374. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} \\
375. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\sqrt{n^2+n}-n} & 376. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+5} x^{3n+7}}{n \cdot 6^{2n}} & 377. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! x^n}{(n!)^3} & 378. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+7} x^{6n}}{\sqrt{n}} \\
379. \sum_{n=1}^{\infty} n! x^{2^n} & 380. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(54n+1)^n x^{3n}}{(81n+2)^n} & 381. \sum_{n=1}^{\infty} 10^{n^2} x^{n^3} & 382. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{3n}{n} x^n}{n^2}
\end{array}$$

Obliczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\begin{array}{llll}
383. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^{n+7} & 384. \sum_{n=0}^{\infty} \binom{4n}{n} x^n & 385. \sum_{n=0}^{\infty} n! x^{n^2} & 386. \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+10}{n} x^n \\
387. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(3n)!}{(2n)!(2n)!} x^n & & &
\end{array}$$

Konwersatorium 14.01.2010.

Obliczyć sumy szeregów potęgowych

$$388. \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad 389. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n} \quad 390. \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$$

391. Podać przykład szeregu potęgowego o promieniu zbieżności 2 i sumie równej 7 dla $x = 1$.

392. Podać przykład dwóch szeregów potęgowych o promieniach zbieżności 1, których suma jest szeregiem potęgowym o promieniu zbieżności 2.

393. Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o sumie 100 i wyrazach dodatnich, że $a_n = n$ dla $n \leq 10$.

394. Podać przykład takiego szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ rozbieżnego do $-\infty$, że $a_n = n$ dla nie-

skończenie wielu n .

395. Podać przykład takiego szeregu rozbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, że granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ istnieje i jest mniejsza od 1.

396. Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, że $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$ dla nieskończenie wielu n .

Uzupełnienie: liczby zespolone, zespolone szeregi liczbowe i potęgowe.

397. Sprawdzić, że

$$\sqrt{a+bi} = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i \operatorname{sgn}(b) \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \right),$$

jeśli $b \neq 0$.

Rozwiązać równania i układy równań.

398. $\bar{z} = z^2$ **399.** $\bar{z} = z^{-1}$ **400.** $1+i = z^2$ **401.** $3+4i = z^2$

402. $-3+4i = z^2$ **403.** $z^2+z=i$ **404.** $z^2+iz=1$ **405.** $z=\bar{z}+1$

406. $z^2\bar{z}=8i$ **407.** $z^4+10z^2+61=0$

408. $\begin{cases} z_1^2 = z_2 \\ z_2^2 = z_1 \end{cases}$ **409.** $\begin{cases} z_1^2 + z_2^2 = 1 \\ z_1 + z_2 = -1 \end{cases}$

410. $\begin{cases} z_1 + iz_2 = 1 \\ z_2 + iz_1 = 2 \end{cases}$ **411.** $\begin{cases} z_1 + \bar{z}_2 = 1 \\ \bar{z}_1 + z_2 = i \end{cases}$

412. $z^5 = 1$ (**Wsk.** $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = (z^2 + az \pm 1)(z^2 + bz \pm 1)$)

Rozwiązać równania i nierówności. Zaznaczyć zbiór rozwiązań na płaszczyźnie zespolonej.

413. $\operatorname{Re} z + \operatorname{Re} z^2 \geq 0$ **414.** $3|z| \leq |z^2| + 1$ **415.** $|z| = |\bar{z} + 1|$

416. $|z+i| \leq |z-i|$ **417.** $\operatorname{Im} \frac{z}{z^2+1} = 0$ **418.** $\operatorname{Re} \frac{z+1}{z} = 0$

419. W trójkącie prostokątnym PQD kąt przy wierzchołku P jest prosty, a przy tym $PQ = 1$ i $PD = 4$. Ponadto punkt C jest środkiem odcinka PD , punkt A jest środkiem odcinka PC , punkt B jest środkiem odcinka AC . Punkt E leży na prostej PD , przy czym

$$\sphericalangle PQA + \sphericalangle PQB + \sphericalangle PQC = \sphericalangle PQD + \sphericalangle PQE.$$

Obliczyć PE .

Konwersatorium 28.01.2010.**Kryteria zbieżności szeregów o wyrazach zespolonych****Warunek konieczny zbieżności**

Jeżeli z_n nie dąży do 0, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny.

Zbieżność bezwzględna

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny.

Kryterium d'Alemberta

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny.

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny, a co więcej
 $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty$.

Kryterium Cauchy'ego

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny.

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny, a co więcej
 $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty$.

Uogólnienie kryterium o szeregach naprzemiennych

Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżnym do zera nierosnącym ciągiem liczb rzeczywistych dodatnich, to dla dowolnej takiej liczby zespolonej z , że $|z| = 1$ oraz $z \neq 1$, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ jest zbieżny.

Powyższe jest prawdą także dla $|z| < 1$, ale wówczas na ogół stosujemy inne kryteria.

Inne kryteria

Jeżeli szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ są zbieżne, to szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm y_n)$ są zbieżne i wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ jest rozbieżny, to szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm y_n)$ są rozbieżne.

Dla dowolnej liczby zespolonej $c \neq 0$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} c z_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy,

gdy zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$. Jeśli oba szeregi są zbieżne, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} cz_n = c \sum_{n=1}^{\infty} z_n.$$

Zbieżność szeregu nie zależy od zmiany lub pominięcia skończenie wielu początkowych wyrazów.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżne są jednocześnie szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$. Jeśli podane szeregi są zbieżne, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n + i \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n.$$

Obszar zbieżności szeregu potęgowego jest kołem o środku w zerze i promieniu $R \in [0, +\infty]$, zwanym promieniem zbieżności szeregu. Przy $R=0$ koło zbieżności degeneruje się do punktu 0, przy $R=+\infty$ obszarem zbieżności jest cała płaszczyzna zespolona.

Na okręgu będącym brzegiem koła zbieżności szereg potęgowy może być zbieżny w części punktów, a w części rozbieżny.

Zbadać zbieżność szeregów:

$$420. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + in + 1} \quad 421. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + i} \quad 422. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + i} \quad 423. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+i}{n^2 + i}$$

Wyznaczyć obszary zbieżności zespolonych szeregów potęgowych:

$$424. \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n \quad 425. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8z^n}{n^2} \quad 426. \sum_{n=1}^{\infty} n z^n$$

$$427. \sum_{n=0}^{\infty} n! z^{n^2} \quad 428. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{6n}}{n}$$