

Ćwiczenia 26.01.2010 (**wtorek !!!**): zad. 429-444 (tylko zadania wskazane przez studentów)

Egzamin: piątek 29.01.2010, godz. 14.00-17.00, sale HS, EM

Egzamin poprawkowy: piątek 12.02.2010, godz. 9.00-12.00, sala HS

Zadania powtórzeniowe.

429. W każdym z zadań **429.1-429.4** udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.

429.1 O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(1)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+2)$. Czy stąd wynika, że prawdziwa jest implikacja

a) $T(2008) \Rightarrow T(3009)$

b) $T(2008) \Rightarrow T(3010)$

c) $T(2009) \Rightarrow T(3010)$

d) $T(2009) \Rightarrow T(3011)$

429.2 Szereg liczbowy o wyrazach rzeczywistych $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest **zbieżny**. Czy stąd wynika, że **zbieżny** jest szereg

a) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{a_n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} 2008a_n$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 1)$

429.3 Szereg liczbowy o wyrazach rzeczywistych $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest **zbieżny**. Czy stąd wynika, że **rozbieżny** jest szereg

a) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{a_n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} 2008a_n$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 1)$

429.4 Czy funkcja

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 + bx^2 + cx + d & \text{dla } x \leq 0 \\ ex^3 + fx^2 + gx + h & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

jest ciągła, jeżeli

a) $a = 23, b = 24, c = 25, d = 26, e = 27, f = 28, g = 29, h = 30$

b) $a = 25, b = 16, c = 9, d = 4, e = 1, f = 0, g = 1, h = 4$

c) $a = 2, b = 3, c = 5, d = 7, e = 11, f = 13, g = 17, h = 19$

d) $a = 2009, b = 2010, c = 2011, d = 2008, e = 2009, f = 2010, g = 2007, h = 2008$

430. W każdym z zadań **430.1-430.5** podaj kresy zbioru oraz określ, czy kresy należą do zbioru.

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty$.

430.1. $A = \left\{ \frac{5m-2n}{mn} : m, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \right\}$

430.2. $B = \left\{ \frac{m}{n+7} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$

430.3. $C = \{x^2 : x \in (-2, 1)\}$

430.4. $D = \{x^3 : x \in (-2, 1)\}$

430.5. $E = \{3x^2 + y^3 : x, y \in (-2, 1)\}$

431. Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2 \cdot \binom{2n+5}{n} < 3 \cdot 5^n.$$

432. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^k+1}{n^9+1} + \frac{n^k+2}{n^9+4} + \frac{n^k+3}{n^9+9} + \frac{n^k+4}{n^9+16} + \frac{n^k+5}{n^9+25} + \dots + \frac{n^k+n^2}{n^9+n^4} \right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru k , aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

433. Wyznaczyć asymptoty funkcji f danej wzorem

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}.$$

434. Dane są takie ciągi (a_n) i (b_n) , że

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \forall_{n \geq 6/\varepsilon} |a_n - 2| < \varepsilon \quad \text{oraz} \quad \forall_{\varepsilon > 0} \quad \forall_{n \geq 10/\varepsilon} |b_n + 5| < \varepsilon.$$

Niech $c_n = a_n + b_n$. Wskazać odpowiednią liczbę rzeczywistą r oraz liczbę naturalną P i udowodnić, że

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \forall_{n \geq P/\varepsilon} |c_n + r| < \varepsilon.$$

435. Wyznaczyć przedział zbieżności rzeczywistego szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot x^{3n}}{\sqrt{n}}.$$

436. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu liczbowego o wyrazach zespolonych

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p + i}{n^7 - i}$$

w zależności od parametru całkowitego dodatniego p .

437. W każdym z zadań **437.1-437.4** udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.

437.1 Czy zbieżny jest szereg

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n\sqrt{n}}$

437.2 Czy zbieżny jest szereg

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n\sqrt{n}}$

437.3 Czy ciąg (a_n) określony wzorem

$$a_n = \frac{n^k+1}{n^7+1} + \frac{n^k+2}{n^7+4} + \frac{n^k+3}{n^7+9} + \frac{n^k+4}{n^7+16} + \frac{n^k+5}{n^7+25} + \dots + \frac{n^k+n}{n^7+n^2}$$

jest zbieżny dla

a) $k=5$

b) $k=6$

c) $k=7$

d) $k=8$

437.4 O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(1)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest implikacja $T(n+2) \Rightarrow T(n)$. Czy stąd wynika, że **fałszywa** jest implikacja

a) $T(2008) \Rightarrow T(3009)$

b) $T(2008) \Rightarrow T(3010)$

c) $T(2009) \Rightarrow T(3010)$

d) $T(3009) \Rightarrow T(2011)$

438. W każdym z zadań **438.1-439.5** podaj kresy zbioru oraz określ, czy kresy należą do zbioru.

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty$.

$$\mathbf{438.1.} \quad A = \left\{ \sqrt{n^2 + n} - n : n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \right\}$$

$$\mathbf{438.2.} \quad B = \left\{ \sqrt{n^2 + n + 1} - n : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\mathbf{438.3.} \quad C = \{|2 - \log_2 x| : x \in (1, 8]\}$$

$$\mathbf{438.4.} \quad D = \{|2 - \log_2 x| : x \in (1, 16]\}$$

$$\mathbf{438.5.} \quad E = \{|2 - \log_2 x| : x \in (1, 32]\}$$

439. Dobrać odpowiednią liczbę rzeczywistą dodatnią M i **dowieść**, że dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzi nierówność

$$M \leq \frac{14x^{2009} + x^{1111} + 15}{11x^{2009} + x^{666} + 9} \leq 5M.$$

440. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^{2009}}{2^{n!}}.$$

441. Naszkicować wykres funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < a \\ |x| & \text{dla } a \leq x \leq b \\ x^2 & \text{dla } x > b \end{cases}$$

dla każdej pary parametrów $a < b$, dla której funkcja f jest ciągła.

442. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^{2n} + x^n} + x^n \right)$$

w zależności od parametru naturalnego n .

443. Wyznaczyć promień zbieżności rzeczywistego szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! \cdot x^{2n}}{n! \cdot n^n}.$$

444. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}.$$