

1. Czy prawdziwa jest nierówność

- a) $3 - 2\sqrt{2} < \frac{1}{6}$;
- b) $3\sqrt{3} - 5 < \frac{1}{5}$;
- c) $7 - 5\sqrt{2} < \frac{1}{15}$;
- d) $9 - 4\sqrt{5} < \frac{1}{18}$?

2. Czy prawdziwa jest nierówność

- a) $266^7 < 133^8$;
- b) $260^7 < 130^8$;
- c) $250^7 < 125^8$;
- d) $242^7 < 121^8$?

3. W dowolnym postępie arytmetycznym 4-wyrazowym a_1, a_2, a_3, a_4 zachodzi równość

$$a_1 + Xa_3 = Ya_2 + a_4.$$

Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $X = 3, Y = 3$;
- b) $X = 2, Y = 2$;
- c) $X = 5, Y = 6$;
- d) $X = 4, Y = 5$?

4. Czy nierówność $\log_a 3 < \log_a 7$ jest prawdziwa dla

- a) $a = (\sqrt{93} - 9)^{2014}$;
- b) $a = (\sqrt{63} - 9)^{2010}$;
- c) $a = (\sqrt{73} - 9)^{2012}$;
- d) $a = (\sqrt{83} - 9)^{2013}$?

5. Suma dowolnego postępu arytmetycznego n -wyrazowego o wszystkich wyrazach będących liczbami naturalnymi jest podzielna przez n . Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $n = 2011$;
- b) $n = 2013$;
- c) $n = 2012$;
- d) $n = 2014$?

6. Czy liczba $\log_x y$ jest wymierna dla

- a) $x = \log_{243} 2187$, $y = \log_{2187} 243$;
- b) $x = \log_{128} 1024$, $y = \log_{1024} 128$;
- c) $x = \log_2 3$, $y = \log_3 2$;
- d) $x = \log_3 5$, $y = \log_5 3$?

7. Dla dowolnych liczb naturalnych a, b, c, d , jeżeli iloczyn $abcd$ jest podzielny przez n^3 , to co najmniej jedna z liczb a, b, c, d jest podzielna przez n . Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $n = 2$;
- b) $n = 4$;
- c) $n = 16$;
- d) $n = 8$?

8. Czy równość

$$(\log_a b)^{\log_c d} = d^{\log_c \log_a b}$$

jest prawdziwa dla

- a) $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$, $d = 7$;
- b) $a = 4$, $b = 3$, $c = 8$, $d = 27$;
- c) $a = 3$, $b = 9$, $c = 5$, $d = 25$;
- d) $a = 2$, $b = 4$, $c = 8$, $d = 16$?

9. Niech $A(n) = \sqrt[n]{n}$. Czy liczba $\log_{A(n)} A(k)$ jest całkowita, jeżeli

- a) $n = 64, \quad k = 8;$
- b) $n = 16, \quad k = 8;$
- c) $n = 16, \quad k = 4;$
- d) $n = 64, \quad k = 4?$

10. Niech

$$\prod_{i=m}^n a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot a_{m+3} \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n.$$

Czy podana liczba jest wymierna

- a) $\prod_{i=3}^9 \log_i(i+1);$
- b) $\prod_{i=3}^8 \log_i(i+1);$
- c) $\prod_{i=2}^8 \log_i(i+1);$
- d) $\prod_{i=2}^9 \log_i(i+1)?$

11. Przyjmujemy oznaczenia jak w zadaniu 10. Podać wartość podanej liczby w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego, jeśli liczba jest wymierna. Napisać literkę **N**, jeżeli liczba jest niewymierna.

a) $\prod_{i=3}^8 \log_i(i+2) = \dots\dots\dots$

b) $\prod_{i=2}^7 \log_i(i+2) = \dots\dots\dots$

c) $\prod_{i=2}^8 \log_i(i+2) = \dots\dots\dots$

d) $\prod_{i=3}^7 \log_i(i+2) = \dots\dots\dots$

12. Podać przykład takiej liczby **niewymiernej** x , że podana liczba jest wymierna.

a)
Liczba $x^2 + 2x$ jest wymierna, jeżeli $x = \dots\dots\dots$

b)
Liczba $x^2 + 3x$ jest wymierna, jeżeli $x = \dots\dots\dots$

c)
Liczba $x^2 + 4x$ jest wymierna, jeżeli $x = \dots\dots\dots$

d)
Liczba $x^2 + x$ jest wymierna, jeżeli $x = \dots\dots\dots$

13. Dla podanej liczby a podać taką liczbę b (w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego), aby spełniona była równość

$$\log_7 a + \log_7 b = \log_7(a+b).$$

a)
 $a = 3, \quad b = \dots\dots\dots$

b)
 $a = 8/3, \quad b = \dots\dots\dots$

c)
 $a = 5/2, \quad b = \dots\dots\dots$

d)
 $a = 7/2, \quad b = \dots\dots\dots$

14. Niech

$$A(n) = 3^{3^n}$$

$$B(n) = \log_3 A(n)$$

$$C(n) = \log_{A(n)} A(n+1)$$

$$D(n) = \log_{C(n)} B(n).$$

Zapisać podane liczby w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

PRZYPOMNIENIE:

Potęgowanie wykonujemy **od góry**: $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.

a)

$$D(243) = \dots$$

b)

$$D(9) = \dots$$

c)

$$D(81) = \dots$$

d)

$$D(27) = \dots$$

15. Podać przykład liczby niecałkowitej x spełniającej podane równanie, gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y . Wynik podać w postaci ułamka dziesiętnego skończonego lub okresowego (taka postać odpowiedzi jest częścią zadania, więc wyniki poprawne, ale w innej postaci, nie będą uznawane).

a)

$$\{x\} = \{3x\}, \quad x = \dots$$

b)

$$\{2x\} = \{13x\}, \quad x = \dots$$

c)

$$\{x\} = \{4x\}, \quad x = \dots$$

d)

$$\{2x\} = \{7x\}, \quad x = \dots$$