

Lista powtórkowa do kolokwium nr 1
(7 kwietnia 2011, godz. 10:15-12:00, sala HS)

Uwaga: To są zadania do samodzielnej powtórki - na zajęciach (31 marca i 4 kwietnia) rozwiążemy tylko część zadań z tej listy.

Proszę umieć wskazać zadania, które wymagają omówienia.

Kolokwium będzie zakładało umiejętność rozwiązania zadań 1-80 oraz umiejętność samodzielnego myślenia.

46. Czy równość

$$(a+b)^3 = a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3$$

jest prawdziwa dla

- a) $a = 0, b = 2007$;
- b) $a = 2007, b = 2008$;
- c) $a = -2007, b = 0$;
- d) $a = 2007, b = -2007$?

47. Czy istnieje taka liczba naturalna n , że

- a) $n^2 = 4^9 \cdot 3^{28} \cdot 6^{12}$;
- b) $n^5 = 4^9 \cdot 3^{28} \cdot 6^{12}$;
- c) $n^3 = 4^9 \cdot 3^{28} \cdot 6^{12}$;
- d) $n^4 = 4^9 \cdot 3^{28} \cdot 6^{12}$?

48. Czy równość $\sqrt{x^2} = x$ jest prawdziwa dla

- a) $x = 2^{448} - 4^{336}$;
- b) $x = 16^{112} - 2^{448}$;
- c) $x = 4^{336} - 8^{224}$;
- d) $x = 8^{224} - 16^{112}$?

49. Czy podana liczba jest podzielna przez 2^{111}

- a) 6256544265423562514^{70} ;
- b) 1547578087823541024^{40} ;
- c) 4777247245432274100^{60} ;
- d) 8759859808595634036^{50} ?

50. Czy dla dowolnych liczb naturalnych a, b

- a) liczba $\text{NWW}(a, b)$ jest podzielna przez $\text{NWD}(a, b)$;
- b) liczba $\text{NWW}(a, b)$ jest podzielna przez b ;
- c) liczba $\text{NWD}(a, b)$ jest podzielna przez $\text{NWW}(a, b)$;
- d) liczba $\text{NWD}(a, b)$ jest podzielna przez a ?

51. Dla dowolnej liczby naturalnej n liczba n^2 jest podzielna przez 6 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba n^2 jest podzielna przez d . Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $d = 4$;
- b) $d = 36$;
- c) $d = 12$;
- d) $d = 24$?

52. Czy w dowolnym 10-wyrazowym postępie arytmetycznym $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$ zachodzi równość

- a) $a_1 + a_{10} = a_3 + a_7$;
- b) $a_3 + a_9 = 2a_6$;
- c) $a_2 + a_9 = a_5 + a_6$;
- d) $a_3 + a_8 = 2a_5$?

53. Niech $S(n)$ oznacza sumę cyfr liczby n . Czy dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $n - S(n)$ jest podzielna przez

- a) 3;
- b) 9;
- c) 4;
- d) 5?

54. Czy dla dowolnej liczby pierwszej $p > 10$ podana liczba jest podzielna przez 3

- a) $p + 2$;
- b) $p^2 + 7$;
- c) $p + 3$;
- d) $p^2 + 5$?

55. Czy dla dowolnego postępu geometrycznego trójwyrazowego a_1, a_2, a_3 podany niżej ciąg jest postępem geometrycznym

- a) $a_1 + 7, a_2 + 7, a_3 + 7$;
- b) $\sqrt[7]{a_1}, \sqrt[7]{a_2}, \sqrt[7]{a_3}$;
- c) $7a_1, 7a_2, 7a_3$;
- d) a_1^7, a_2^7, a_3^7 ?

56. Czy istnieją dwie liczby naturalne, których największy wspólny dzielnik stanowi $p\%$ ich najmniejszej wspólnej wielokrotności, jeżeli

- a) $p = 20$;
- b) $p = 50$;
- c) $p = 30$;
- d) $p = 40$?

57. Czy podana liczba jest kwadratem liczby naturalnej

- a) $6^5 \cdot 8^3$;
- b) $6^5 \cdot 24^3$;
- c) $6^5 \cdot 12^3$;
- d) $6^5 \cdot 18^3$?

58. Czy równość

$$a^4 \cdot b^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

jest prawdziwa dla

- a) $a = 2, b = 2$;
- b) $a = 2, b = 5/2$;
- c) $a = 3, b = 2$;
- d) $a = 3, b = 3/2$?

59. Czy istnieje taka liczba pierwsza p , że

- a) liczba $p+23$ jest pierwsza;
- b) liczba $p+29$ jest pierwsza;
- c) liczba $p+25$ jest pierwsza;
- d) liczba $p+27$ jest pierwsza?

60. Czy $\text{NWW}(a, b, c) = abc$, jeżeli

- a) $a = 3, b = 5, c = 7$;
- b) $a = 3, b = 20, c = 25$;
- c) $a = 3, b = 6, c = 8$;
- d) $a = 3, b = 9, c = 15$?

61. Czy prawdziwa jest równość

- a) $3 \cdot \binom{11}{4} = 2 \cdot \binom{11}{5}$;
- b) $3 \cdot \binom{19}{7} = 2 \cdot \binom{19}{8}$;
- c) $3 \cdot \binom{14}{5} = 2 \cdot \binom{14}{6}$;
- d) $3 \cdot \binom{17}{6} = 2 \cdot \binom{17}{7}$?

62. Spośród dowolnych k różnych liczb naturalnych można wybrać takie 3 różne liczby a, b, c , że obie liczby $a-b$ oraz $b-c$ są podzielne przez n . Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $k=9, n=5$;
- b) $k=30, n=15$;
- c) $k=11, n=7$;
- d) $k=21, n=10$?

63. Dla dowolnej liczby naturalnej n , liczba n^2 jest podzielna przez a wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez b . Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $a=6, b=18$;
- b) $a=48, b=24$;
- c) $a=12, b=54$;
- d) $a=24, b=36$?

64. Czy podaną liczbę można przedstawić w postaci $m^2 \cdot n^3$, gdzie m, n są liczbami naturalnymi

- a) $6 \cdot 8^7$;
- b) $6 \cdot 24^7$;
- c) $6 \cdot 9^7$;
- d) $6 \cdot 12^7$?

65. Czy podaną liczbę można przedstawić w postaci $m^2 \cdot n^3$, gdzie m, n są liczbami naturalnymi

- a) $(10!)^{10} \cdot 17$;
- b) $(13!)^{13} \cdot 11$;
- c) $(11!)^{11} \cdot 15$;
- d) $(12!)^{12} \cdot 13$?

66. Czy prawdziwa jest równość

- a) $\sqrt{(6 - \sqrt{55})^{12}} = (6 - \sqrt{55})^6$;
- b) $\sqrt{(9 - \sqrt{55})^{18}} = (9 - \sqrt{55})^9$;
- c) $\sqrt{(7 - \sqrt{55})^{14}} = (7 - \sqrt{55})^7$;
- d) $\sqrt{(8 - \sqrt{55})^{16}} = (8 - \sqrt{55})^8$?

67. Czy prawdziwa jest nierówność

- a) $5 - \sqrt{24} < \frac{1}{10}$;
- b) $\sqrt{51} - 7 < \frac{1}{7}$;
- c) $\sqrt{26} - 5 < \frac{1}{10}$;
- d) $7 - \sqrt{47} < \frac{1}{7}$?

68. Czy prawdziwa jest nierówność

- a) $2\sqrt{2} < 3$;
- b) $4\sqrt[3]{2} < 5$;
- c) $3\sqrt{3} < 5$;
- d) $5\sqrt{5} < 11$?

69. 3-ci, 4-ty i 6-ty wyraz postępu arytmetycznego tworzą (w tej kolejności) postęp geometryczny trójwyrazowy. Czy stąd wynika, że postęp geometryczny tworzą także wyrazy (z zachowaniem kolejności):

- a) 3-ci, 5-ty, 11-ty ;
- b) 3-ci, 6-ty, 12-ty ;
- c) 4-ty, 6-ty, 10-ty ;
- d) 6-ty, 8-my, 11-ty ?

70. Czy prawdziwa jest nierówność

- a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^k} + \dots + \frac{1}{2^{22}} < \frac{10}{11}$;
- b) $\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \frac{1}{625} + \dots + \frac{1}{5^k} + \dots + \frac{1}{5^{55}} < \frac{3}{11}$;
- c) $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots + \frac{1}{3^k} + \dots + \frac{1}{3^{33}} < \frac{5}{11}$;
- d) $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \dots + \frac{1}{4^k} + \dots + \frac{1}{4^{44}} < \frac{4}{11}$?

71. Suma wyrazów dowolnego postępu arytmetycznego n -wyrazowego, o wyrazach będących liczbami naturalnymi, jest podzielna przez n . Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $n = 2008$;
- b) $n = 2011$;
- c) $n = 2009$;
- d) $n = 2010$?

72. Podać największy wspólny dzielnik i najmniejszą wspólną wielokrotność liczb a i b

- a) $a = 12^{18}, b = 18^{12}$,
 $\text{NWD}(a, b) = \dots$ $\text{NWW}(a, b) = \dots$
- b) $a = 11!, b = 12$,
 $\text{NWD}(a, b) = \dots$ $\text{NWW}(a, b) = \dots$
- c) $a = 4^{20} \cdot 6^{15}, b = 4^{15} \cdot 6^{20}$,
 $\text{NWD}(a, b) = \dots$ $\text{NWW}(a, b) = \dots$
- d) $a = 10!, b = 11$,
 $\text{NWD}(a, b) = \dots$ $\text{NWW}(a, b) = \dots$

73. Podać największy wspólny dzielnik liczb

- a)
 $\text{NWD}(52714014^8, 2^{13}) = \dots$
- b)
 $\text{NWD}(11223344^8, 22446688^{13}) = \dots$
- c)
 $\text{NWD}(80000025^8, 30^{13}) = \dots$
- d)
 $\text{NWD}(4852000017^8, 10^{11}, 21^{14}) = \dots$

74. Podać zbiór rozwiązań nierówności

- a)
 $x^{1000} \leq x^{2007} \dots$
- b)
 $x^{1001} \leq x^{2008} \dots$
- c)
 $x^{1001} \leq x^{2007} \dots$
- d)
 $x^{1000} \leq x^{2008} \dots$

75. Podać zbiór rozwiązań nierówności

a)

$$|x-4| < 3 \dots\dots\dots$$

b)

$$|x+3| \geq 2 \dots\dots\dots$$

c)

$$|x-3| \leq 4 \dots\dots\dots$$

d)

$$|x-3| < |x-4| \dots\dots\dots$$

76. Podać zbiór rozwiązań nierówności

a)

$$4 \leq x^2 \leq 9 \dots\dots\dots$$

b)

$$1 \leq |x-3| \leq 2 \dots\dots\dots$$

c)

$$-1 \leq x^2 \leq 4 \dots\dots\dots$$

d)

$$3 \leq |x| \leq 4 \dots\dots\dots$$

77. Podać NWD i NWW

a)

$$\text{NWD}(60^{60}, 90^{90}) = \dots\dots\dots$$

b)

$$\text{NWW}(1133^{2266}, 2266^{1133}) = \dots\dots\dots$$

c)

$$\text{NWW}(60^{60}, 90^{90}) = \dots\dots\dots$$

d)

$$\text{NWD}(1133^{2266}, 2266^{1133}) = \dots\dots\dots$$

78. Podać liczbę zer końcowych danej liczby

- a)
 $2008571939215^{50} \cdot 2008571939032^{22}$
- b)
 $2008571939125^{20} \cdot 2008571939214^{55}$
- c)
 $2008571939025^{40} \cdot 2008571939028^{33}$
- d)
 $2008571939350^{30} \cdot 2008571939122^{44}$

79. Podać taką liczbę p , że liczba p po zwiększeniu o $p\%$ daje n

- a)
 $n = 24$ $p = \dots$
- b)
 $n = 600$ $p = \dots$
- c)
 $n = 39$ $p = \dots$
- d)
 $n = 75$ $p = \dots$

80. Wskazać dowolny dzielnik pierwszy podanej liczby

- a)
 $13^{17} + 6^{17}$
- b)
 $13^{20} - 12^{20}$
- c)
 $13^{18} - 8^{18}$
- d)
 $13^{19} - 10^{19}$