81. Uprościć wyrażenia

a) $4^{2+\log_2 7}$

b) $\log_{\sqrt{3}} 2\cdot\log_5 9$

c) $\log_6 2+\log_{36} 9$

82. Dla ilu trójek liczb rzeczywistych dodatnich a,b,c różnych od 1 spełniona jest podana równość? Dla wszystkich? Dla żadnej? Dla niektórych (podać 3 przykłady, a jeśli przykładów jest mniej niż 3, podać wszystkie)?

a) $\log_a(bc)=(\log_a b)+\log_a c$

b) $\log_a(bc)=(\log_a b)\cdot\log_a c$

c) $\log_a(b+c)=(\log_a b)\cdot\log_a c$

d) $\log_a(b+c)=(\log_a b)+\log_a c$

e) $(\log_a b)\cdot\log_b c=\log_a c$

f) $\log_a\left(b^c\right)=c\cdot\log_a b$

g) $\log_a\left(b^c\right)=(\log_a b)^c$

83. Bez użycia kalkulatora rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

a) $\log_2 7$ czy $\log_3 7$

b) $\log_{0,2} 7$ czy $\log_{0,3} 7$

c) $\log_2 7$ czy $\log_{0,3} 7$

d) $\log_{0,2} 7$ czy $\log_3 7$

e) $\log_2 0,7$ czy $\log_3 0,7$

f) $\log_{0,2} 0,7$ czy $\log_{0,3} 0,7$

g) $\log_2 0,7$ czy $\log_{0,3} 0,7$

h) $\log_{0,2} 0,7$ czy $\log_3 0,7$

i) $\log_9 27$ czy $\log_4 8$

j) $\log_3 8$ czy $\log_2 5$

k) $\log_5 127$ czy $\log_{10} 999$

l) $\log_3 100$ czy $\log_2 10$

m) $(\log_2 3)\cdot\log_5 7$ czy $(\log_2 7)\cdot\log_5 3$

n) $(\log_2 3)\cdot\log_7 5$ czy $(\log_7 9)\cdot\log_{16} 25$

o) $\log_2 3$ czy $\log_3 5$

p) $\log_3 7$ czy $\log_5 19$

q) $\log_2 3$ czy $\log_5 13$

r) $\log_3 5$ czy $\log_{15} 56$

Wskazówka do kilku ostatnich pytań:

Wiadomo, że wartość ułamka nie zmieni się, jeżeli licznik i mianownik pomnożymy przez tę samą liczbę różna od zera.

Podobnie, wartość logarytmu nie zmieni się, jeżeli podstawę i liczbę logarytmowaną .....

84. Czy jest prawdą, że $\log_2(a+b)=\log_2 a+\log_2 b$, jeżeli

a) $a=2$, $b=2$
b) $a=3/2$, $b=3$
c) $a=2$, $b=3$
d) $a=3/2$, $b=2$
e) $a=5$, $b=5/4$

85. Czy jest prawdą, że $a\cdot\log_7 b=b\cdot\log_7 a$, jezeli

a) $a=2$, $b=3$
b) $a=2$, $b=4$
c) $a=2$, $b=5$
d) $a=3$, $b=4$
e) $a=64/27$, $b=256/81$

86. Czy jest prawdą, że

a) $2\cdot\log_3 5=\log_3 10$
b) $2\cdot\log_3 5=\log_3 25$
c) $2+\log_3 5=\log_3 10$
d) $2+\log_3 5=\log_3 45$
e) $\sqrt{(2-\log_3 7)^2}=2-\log_3 7$
f) $\sqrt{(2-\log_2 7)^2}=2-\log_2 7$
g) $\sqrt{(2-\log_5 23)^2}=2-\log_5 23$
h) $\sqrt{(2-\log_4 17)^2}=2-\log_4 17$

87. Czy liczba 0,99999999999999999999999999... jest wymierna, czy niewymierna?

88. Dowieść, że podane liczby są niewymierne

a) $\sqrt{2}$
b) $\sqrt[3]{2}$
c) $\sqrt{5}+\sqrt{7}$
d) $\log_3 10$
e) $\log_{12} 6$

89. Rozstrzygnąć, czy liczba $\log_2 3+\log_4 5$ jest wymierna czy niewymierna.

90. Dla których liczb naturalnych m i n większych od 1 liczba

$$\frac{\log_m(mn)\cdot\log_n(mn)}{\log_m(mn)+\log_n(mn)}$$

jest wymierna, a dla których niewymierna?

91. Czy liczba $\log_{(\sqrt{2}-1)}(\sqrt{2}+1)$ jest wymierna czy niewymierna?

92. Czy liczba

$$2^{\log_3 5}-5^{\log_3 2}$$

jest wymierna czy niewymierna?

Oszustwo **93.**

Zadanie: Dowieść, że liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest niewymierna.

Rozwiązanie I:

Liczba $-\sqrt{2}$ jest niewymierna. Także liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}$ jest niewymierna, bo gdyby była wymierna, to jej kwadrat $3-\sqrt{8}$ też byłby liczbą wymierną, a nie jest. Zatem liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest niewymierna jako suma liczb niewymiernych.

Rozwiązanie II:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest wymierna i oznaczmy ją przez w. Wtedy

$$w=\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$$

$$w+\sqrt{2}=\sqrt{3-\sqrt{8}}$$

$$w^2+2\sqrt{2}w+2=3-2\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2}(w+1)+(w-1)(w+1)=0$$

Dzieląc ostatnią równość przez $w+1$ otrzymujemy

$$2\sqrt{2}+w-1=0,$$

co stanowi sprzeczność z założeniem wymierności liczby w, gdyż lewa strona równości jest liczbą niewymierną i nie może być równa 0.

Czy powyższe rozwiązania są poprawne?

94. Liczby a i b są dodatnie i niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba $a+b$ jest niewymierna?

95. Liczby $a+b$, $b+c$ i $c+a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a, b, c są wymierne?

96. Liczby $a+b$, $b+c$ i $c+a$ są niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba $a+b+c$ jest niewymierna?

97. Liczby $a+b$, $b+c$, $c+d$ i $d+a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a, b, c, d są wymierne?

98. Niech n będzie liczbą naturalną. Mając do dyspozycji nawiasy, n, liczby całkowite oraz znaki $+,-,\cdot,:$ i $\sqrt{}$ zapisać liczbę niewymierną dodatnią mniejszą od $\frac{1}{n}$.

99. Suma wyrazów rosnącego postępu arytmetycznego 2007-wyrazowego o wyrazach dodatnich jest liczbą wymierną. Czy stąd wynika, że co najmniej jeden wyraz postępu jest liczbą wymierną?

100. To samo pytanie dla postępu 2008-wyrazowego.

101. Liczby a i b są **różnymi liczbami niewymiernymi dodatnimi**. Czy stąd wynika, że

a) liczba $a+b$ jest niewymierna

b) liczba $a-b$ jest niewymierna

c) co najmniej jedna z liczb $a+b$ oraz $a-b$ jest liczbą niewymierną

d) liczba ab jest niewymierna
e) liczba a/b jest niewymierna
f) co najmniej jedna z liczb ab oraz a/b jest liczbą niewymierną

TEST: 20 przykładów.

Odpowiedzi, których poprawności nie da się uzasadnić elementarnie, nie mogą być zaliczone. Wszystkie przykłady można podać bez używania operacji bardziej skomplikowanych niż logarytmy i pierwiastki.

102. Dać przykład takiej liczby rzeczywistej x, że
a) $0<x<1$ oraz x jest niewymierna,
b) $\sqrt{5}<x<\sqrt{6}$ oraz x jest wymierna,
c) x^2 i x^3 są niewymierne, ale x^5 jest wymierna,
d) x^4 i x^6 są wymierne, ale x^5 jest niewymierna,
e) $(x+1)^2$ jest niewymierna,
f) x jest niewymierna, ale $x+\frac{1}{x}$ jest wymierna,
g) x jest niewymierna i 2^x jest niewymierna,
h) 2^x+3^x jest liczbą niewymierną,
i) 2^x+3^x jest liczbą wymierną,
j) $\log_2 x+\log_3 x$ jest liczbą niewymierną,
k) $\log_2 x+\log_3 x$ jest liczbą wymierną,
l) $\log_2 x\cdot\log_3 x$ jest liczbą niewymierną,
m) $\log_2 x\cdot\log_3 x$ jest liczbą wymierną,
n) $2^x+\log_2 x$ jest liczbą całkowitą dodatnią,
o) $2^x+\log_2 x$ jest liczbą niewymierną,
p) $x+\log_2 x$ jest liczbą wymierną niecałkowitą,
q) $x^{\sqrt{2}}$ jest liczbą wymierną niecałkowitą,
r) $x^{\sqrt{2}}$ jest liczbą niewymierną,
s) $\log_x(1+x)$ jest liczbą wymierną,
t) $\log_x(1+x)$ jest liczbą niewymierną.

103. Wyznaczyć zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x, dla których prawdziwa jest podana implikacja
a) $x>0\Rightarrow x+1>0$
b) $x>0\Rightarrow x-1>0$
c) $x=3\Rightarrow x>0$
d) $x=-3\Rightarrow x>0$
e) $x^2=4\Rightarrow x=2$
f) $x^2=-4\Rightarrow x=-2$

Oznaczenia: Przypominam, że $[x]$ oraz $\{x\}$ oznaczają odpowiednio część całkowitą i część ułamkową liczby rzeczywistej x.

104. Podać przykład takiej liczby rzeczywistej x, że

a) $[x]=-4,\ \ \{x\}<1/10$

b) $[x]=-4,\ \ \{x\}>9/10$

c) $2\cdot\{x\}\neq\{2x\},\ \ x<0$

d) $2\cdot\{x\}=\{5x\},\ \ x>10$

105. Podać przykład takich liczb rzeczywistych x, y, że

a) $[x+y]\neq[x]+[y]$

b) $[2x+y]=2[x]+[y]+2$

c) $[x+y]=\{x\}+\{y\},\quad x,y>0$

d) $[xy]=[x]\cdot[y]+10$

106. Wyznaczyć wszystkie takie liczby rzeczywiste a, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $[x+a]=[x]+a$.

107. Rozwiązać nierówności

a) $\log_{2x}(x^2+1)\leqslant\log_{2x}(x^2+3x)$

b) $(x^2+x+1)^{3x}>(x^2+x+1)^{x+1}$

c) $x^4-5x^2+4<0$

d) $\log_2 x+\log_x 4<3$

108. Wyznaczyć wszystkie takie pary liczb p, q, że p i q są pierwiastkami równania

$$x^2+px+q=0\,.$$

Sposób I

Liczby p i q są pierwiastkami podanego równania wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi tożsamość

$$x^2+px+q=(x-p)(x-q)\,.$$

....

Odpowiedź: Są dwie pary liczb spełniające warunki zadania:
$p=$......, $q=$...... oraz $p=$......, $q=$.......

Sposób II

Liczby p i q są pierwiastkami podanego równania wtedy i tylko wtedy, gdy

$$p^2+p^2+q=0$$

oraz

$$q^2+pq+q=0\,.$$

....

Odpowiedź: Są trzy pary liczb spełniające warunki zadania:
$p=$......, $q=$......; $p=$......, $q=$...... oraz $p=$......, $q=$.......

Dlaczego oba sposoby rozwiązania prowadzą do różnych odpowiedzi?

Powtórka

Uwaga: Poniższe zadania są zadaniami do samodzielnej powtórki - na zajęciach rozwiążemy tylko część zadań z tej listy.

Proszę umieć wskazać zadania, które wymagają omówienia.

Kolokwium nr 2 (5 maja 2011) będzie zakładało umiejętność rozwiązania zadań 1-154 oraz umiejętność samodzielnego myślenia.

109. Obliczyć podając wynik w postaci ułamka zwykłego

a) $\sqrt{0,(4)}+\sqrt[3]{3,374(9)}$

b) $(0,2(9)+1,(09))\cdot 12,(2)$

c) $(0,(037))^{0,(3)}$

110. Wskazać odpowiednią liczbę całkowitą k i udowodnić nierówności $10^k<L<10^{2k}$ lub $10^{2k}<L<10^k$.

a) $L=3972^{257}$

b) $L=257^{3972}$

c) $L=4444^{4444}$

d) $L=700!$

e) $\left(7-4\sqrt{3}\right)^{500}$

f) $(\log_2 23)^{1000}$

g) $(\log_{23} 2)^{500}$

h) 2^{1000}

i) $1^4+2^4+3^4+4^4+\ldots+1000^4$

j) $\log_2(1024!)$

111. Dane są liczby rzeczywiste x i y spełniające warunki $|x-4|<1$ oraz $|y-4|<2$. Czy stąd wynika, że

a) $|x-y|<2$

b) $|x+y|>6$

c) $|x+y|<10$

d) $|xy|>10$

e) $|xy|<40$

112. Kilogram ziemniaków kosztuje 50 groszy. Jaka będzie cena ziemniaków, jeżeli ich cena wzrośnie

a) o 2000%

b) o 1000%

c) o 400%

d) o 200%

e) o 100%

f) o 20%

113. Za 17 złotych i 37 groszy można kupić 30 kg ziemniaków. Ile ziemniaków można będzie kupić za 34 złote i 74 grosze, jeżeli ich cena

a) wzrośnie o 20%
b) zmaleje o 20%
c) wzrośnie o 50%
d) zmaleje o 50%
e) wzrośnie o 100%
f) zmaleje o 90%

114. W rosnącym postępie arytmetycznym o wyrazach dodatnich ósmy wyraz jest większy od piątego o 20%. Podać przykład takich m i n, że n-ty wyraz jest od m-tego
a) większy o 100%
b) mniejszy o 10%
c) większy o 10%
d) mniejszy o 1%
e) większy o 1000%
f) mniejszy o 99%

115. Czy istnieją takie liczby pierwsze p i q, że liczba q jest od liczby p
a) większa o 100%
b) większa o 50%
c) większa o 40%
d) większa o 20%
e) większa o 5%
f) mniejsza o 5%

116. Dla funkcji f zdefiniowanej podanym wzorem oraz dla podanego zbioru Z rozstrzygnąć, czy funkcja f jest różnowartościowa na zbiorze Z oraz podać zbiór wartości funkcji f na zbiorze Z.
a) $f(x)=x^2,\ \ Z=[-3,-1)$
b) $f(x)=x^2,\ \ Z=(-3,4]$
c) $f(x)=x^2,\ \ Z=[-3,-2]\cup[3,5]$
d) $f(x)=x^2,\ \ Z=(-3,-2]\cup[3,4)$
e) $f(x)=x^2,\ \ Z=(0,3)$
f) $f(x)=x^2-2x+1,\ \ Z=(0,3)$
g) $f(x)=x^2+2x+1,\ \ Z=(0,3)$
h) $f(x)=2^x,\ \ Z=(-3,3)$
i) $f(x)=|2^x-3|,\ \ Z=(-3,3)$
j) $f(x)=|2^x-5|,\ \ Z=(-3,3)$

117. Czy prawdziwa jest równość

a) $\log_2 3=2\cdot\log_4 3$;

b) $\log_2 16=2\cdot\log_3 9$;

c) $\log_4 9=2\cdot\log_4 3$;

d) $\log_2 6=1+\log_2 3$?

118. Czy równość $\left(\sqrt{a}\right)^b = a^{\sqrt{b}}$ jest prawdziwa dla

a) $a=16$, $b=2$;

b) $a=1$, $b=5$;

c) $a=11$, $b=3$;

d) $a=6$, $b=4$?

119. Czy podana liczba jest liczbą całkowitą podzielną przez 10

a) $\frac{29!}{26!}$;

b) $\frac{36!}{33!}$;

c) $\frac{30!}{28!}$;

d) $\frac{35!}{31!}$?

120. Czy prawdziwa jest nierówność

a) $\sqrt{3}+\sqrt{8}<5$;

b) $\sqrt{10}+\sqrt{17}<7$;

c) $\sqrt{5}+\sqrt{17}<6$;

d) $\sqrt{8}+\sqrt{15}<7$?

121. Czy podana liczba jest całkowita

a) $2^{\log_4 3}$;

b) $8^{\log_4 25}$;

c) $4^{\log_2 3}$;

d) $2^{\log_8 27}$?

122. Wiadomo, że

$$\binom{14}{4}=1001, \qquad \binom{14}{5}=2002, \qquad \binom{14}{6}=3003.$$

Czy prawdą jest, że

a) $\binom{15}{5}=3003$;

b) $\binom{16}{10}=8008$;

c) $\binom{15}{6}=5005$;

d) $\binom{16}{6}=6006$?

123. Liczby całkowite dodatnie m i n są dzielnikami liczby całkowitej dodatniej k. Czy stąd wynika, że liczba k jest podzielna przez

a) mn ;

b) $m+n$;

c) najmniejszą wspólną wielokrotność liczb m i n ;

d) największy wspólny dzielnik liczb m i n ?

124. Czy nierówność $3x < x^2+2$ jest prawdziwa dla

a) $x=\log_3 2$;

b) $x=\log_5 2$;

c) $x=\log_2 3$;

d) $x=\log_2 5$?

125. Czy podana liczba jest całkowita

a) $\dfrac{15!}{35}$;

b) $\dfrac{18!}{38}$;

c) $\dfrac{16!}{36}$;

d) $\dfrac{17!}{37}$?

126. Czy równanie $x^3+y^4=z^5$ jest spełnione przez liczby

a) $x=2^8$, $y=2^6$, $z=2^5$;

b) $x=2^{24}$, $y=2^{24}$, $z=2^{25}$;

c) $x=2$, $y=2$, $z=2$;

d) $x=2^{12}$, $y=2^9$, $z=2^7$?

127. Czy prawdziwa jest nierówność

a) $\dfrac{11}{17} < \dfrac{9}{19}$;

b) $\dfrac{11}{17} < \dfrac{11}{19}$;

c) $\dfrac{11}{17} < \dfrac{13}{15}$;

d) $\dfrac{11}{17} < \dfrac{9}{17}$?

128. Czy równanie $a^2+2ab+b^2=c^2$ jest spełnione przez liczby

a) $a=175$, $b=429$, $c=2006$;

b) $a=449$, $b=409$, $c=-40$;

c) $a=-449$, $b=409$, $c=40$;

d) $a=449$, $b=-409$, $c=40$?

129. Czy nierówność $\sqrt{x+y} < \sqrt{x} + \sqrt{y}$ jest prawdziwa dla

a) $x = 9^{37}$, $y = 25^{13}$;

b) $x = \log_7 9$, $y = \log_{11} 37$;

c) $x = 2006$, $y = 8024$;

d) $x = \binom{17}{5}$, $y = \binom{17}{6}$?

130. Czy prawdziwa jest nierówność

a) $2^{1000} < 8^{400}$;

b) $5^{1003} < 25^{600}$;

c) $3^{1001} < 9^{500}$;

d) $4^{1002} < 2^{2006}$?

131. Czy dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzi równość

$$(x^a)^b = x^a \cdot x^b ,$$

jeżeli

a) $a = 2$, $b = 2$;

b) $a = 2$, $b = 5/2$;

c) $a = 3$, $b = 3$;

d) $a = 3$, $b = 3/2$?

132. Niech $a_n = \dfrac{n!}{37^n}$. Czy wtedy

a) $a_{10} < a_{20}$;

b) $a_{40} < a_{50}$;

c) $a_{36} < a_{37}$;

d) $a_{37} < a_{38}$?

133. Dane są takie liczby całkowite a, b, c, d, że liczby $a+b+c$ oraz $b+c+d$ są nieparzyste. Czy stąd wynika, że

a) liczba $a+d$ jest nieparzysta;

b) liczba $b+c$ jest parzysta;

c) liczba $a+d$ jest parzysta;

d) liczba $b+c$ jest nieparzysta?

134. Liczby rzeczywiste dodatnie x i y spełniają nierówność $|x-y| < 1$. Czy stąd wynika, że

a) $|x^2 - y^2| < 1$;

b) $x^2 + y^2 < (x+y)^2$;

c) $x + y < 1$;

d) $|x^2 - y^2| < x + y$?

135. Czy istnieje taka liczba rzeczywista M, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

a) $\frac{n}{n+1} < M$;

b) $\frac{n^2+1}{n+1} < M$;

c) $\frac{n+1}{n} < M$;

d) $\frac{n+1}{n^2+1} < M$?

136. Dowolna liczba całkowita dodatnia jest podzielna przez mn wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona jednocześnie podzielna przez m i przez n. Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

a) $m=12$, $n=15$;

b) $m=15$, $n=22$;

c) $m=13$, $n=18$;

d) $m=14$, $n=21$?

137. Czy dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c różnych od 1 zachodzi równość

a) $\log_a(bc) = (\log_a b) + \log_a c$;

b) $\log_a(b^c) = (\log_a b)^c$;

c) $\log_a(b+c) = (\log_a b) \cdot \log_a c$;

d) $(\log_a b) \cdot \log_b c = \log_a c$?

138. Czy prawdziwa jest nierówność

a) $\log_2 5 < \log_3 5$;

b) $\log_{0,2} 7 < \log_3 7$;

c) $\log_{0,2} 7 < \log_{0,3} 7$;

d) $\log_2 7 < \log_{0,3} 7$?

139. Czy dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi równość

a) $\left(2^{2^n}\right)^2 = 2^{2^{n+1}}$;

b) $\left(2^{2^n}\right)^8 = 2^{2^{n+4}}$;

c) $\left(2^{2^n}\right)^4 = 2^{2^{n+2}}$;

d) $\left(2^{2^n}\right)^6 = 2^{2^{n+3}}$?

UWAGA: $a^{b^c} = a^{(b^c)}$

140. Czy dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z spełniających warunki $|x-2|<1$, $|y-3|<1$ oraz $|z-5|<1$ zachodzi nierówność

a) $x+y+z<12$;

b) $xyz>10$;

c) $x+y+z>7$;

d) $xyz<60$?

141. Czy liczba $\log_4(n^2+7)$ jest wymierna dla

a) $n=1$;

b) $n=7$;

c) $n=3$;

d) $n=5$?

142. Czy jest prawdą, że

a) $\log_5 26<\sqrt{22}-3$;

b) $\log_2 26<\sqrt{14}$;

c) $\log_3 26<\sqrt{18}-1$;

d) $\log_2 26<\sqrt{26}$?

143. Czy podana liczba jest wymierna

a) $\sqrt{\left(5-2\sqrt{6}\right)^2}+\sqrt{\left(7-2\sqrt{6}\right)^2}$;

b) $\sqrt{\left(5+2\sqrt{10}\right)^2}+\sqrt{\left(6-2\sqrt{10}\right)^2}$;

c) $\sqrt{\left(5-2\sqrt{7}\right)^2}+\sqrt{\left(6-2\sqrt{7}\right)^2}$;

d) $\sqrt{\left(4+2\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(5-2\sqrt{5}\right)^2}$?

144. Czy prawdziwa jest nierówność

a) $(50!)^{100}<(100!)^{50}$;

b) $5^{222}<3^{333}$;

c) $100!<10^{200}$;

d) $100!<100^{45}$?

145. Dane są takie liczby rzeczywiste a, b, c, że liczby $a+b$ oraz $a+b+c$ są wymierne. Czy stąd wynika, ze

a) liczba a jest wymierna;

b) liczba b jest niewymierna;

c) liczba c jest wymierna;

d) liczba $b+c$ jest wymierna?

146. Dla dowolnej liczby naturalnej k liczba k^3 jest podzielna przez m wtedy i tylko wtedy, gdy liczba k^3 jest podzielna przez n. Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

a) $m=2^3$, $n=2^4$;

b) $m=2^8$, $n=2^{10}$;

c) $m=2^5$, $n=2^6$;

d) $m=2^7$, $n=2^9$?

147. Czy podane liczby tworzą (w podanej kolejności) postęp arytmetyczny trójwyrazowy

a) $\log_7 1$, $\log_7 3$, $\log_7 5$;

b) $\log_7 25$, $\log_7 10$, $\log_7 4$;

c) $\log_7 1$, $\log_7 4$, $\log_7 16$;

d) $\log_7 4$, $\log_7 6$, $\log_7 9$?

148. Czy istnieje liczba naturalna, której kwadrat

a) ma sumę cyfr równą 12 ;

b) jest zakończony cyframi ...222 ;

c) ma sumę cyfr równą 13 ;

d) ma sumę cyfr równą 14 ?

149. Czy funkcja f określona wzorem $f(x)=\{x\}$ (część ułamkowa) jest różnowartościowa na przedziale

a) $\left[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$;

b) $\left[-\frac{3}{7}, \frac{3}{7}\right)$;

c) $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$;

d) $\left(-\frac{3}{5}, \frac{3}{5}\right)$?

150. Obliczyć (znak [ ] oznacza część całkowitą)

a)
$\left[\sqrt{90}+1\right]=$........................

b)
$\left[\sqrt{60}+4\right]=$........................

c)
$\left[\sqrt{80}+2\right]=$........................

d)
$\left[\sqrt{70}+3\right]=$........................

151. Podać zbiór rozwiązań nierówności

a)
$-1 \leqslant x^2 < 25 \Leftrightarrow x \in$.........................

b)
$1 \leqslant x^5 < 32 \Leftrightarrow x \in$.........................

c)
$-1 \leqslant x^3 < 27 \Leftrightarrow x \in$.........................

d)
$1 \leqslant x^4 < 16 \Leftrightarrow x \in$.........................

152. Uprościć podane wyrażenia podając wynik w postaci liczby całkowitej

a)
$\log_6 12 + 3 \cdot \log_6 18 + \log_6 24 =$.........................

b)
$3 \cdot \log_6 12 + 5 \cdot \log_6 18 + \log_6 24 =$.........................

c)
$2 \cdot \log_6 12 + 4 \cdot \log_6 18 + \log_6 24 =$.........................

d)
$\log_6 12 + 5 \cdot \log_6 18 + 2 \cdot \log_6 24 =$.........................

153. Wskazać taką liczbę naturalną k, że

$$10^k < n < 10^{2k} .$$

a)
$n = 3000!$, $k =$.........................

b)
$n = 2^{1200} \cdot (100!)^{10}$, $k =$.........................

c)
$n = 6^{666}$, $k =$.........................

d)
$n = 77^7$, $k =$.........................

154. Dla podanych liczb a, b wskazać taką liczbę c, że liczby

$$\log_a 37, \ \log_b 37, \ \log_c 37$$

tworzą (w tej właśnie kolejności) postęp arytmetyczny trójwyrazowy.

a) $a = 64$, $b = 8$, $c =$.........................

b) $a = 64$, $b = 16$, $c =$.........................

c) $a = 4$, $b = 8$, $c =$.........................

d) $a = 2$, $b = 8$, $c =$.........................