

155. Uporządkować podane liczby w kolejności niemalejącej.

$\sin 50^\circ$, $\cos 80^\circ$, $\sin 170^\circ$, $\cos 200^\circ$, $\sin 250^\circ$, $\cos 280^\circ$.

156. Naszkicować wykres funkcji f zdefiniowanej wzorem

a) $f(x) = \sin 2x$

b) $f(x) = \cos 3x$

c) $f(x) = \sin(x/2)$

d) $f(x) = \sin^2 x$

e) $f(x) = \cos^2 x$

f) $f(x) = (1 + \cos 2x)/2$

g) $f(x) = (1 - \cos 2x)/2$

h) $f(x) = 3 + 5\cos x$

i) $f(x) = \sin \pi x$

157. Która liczba jest większa?

a) $\sin 1^\circ$ czy $\sin 1$

b) $\sin 2^\circ$ czy $\sin 2$

c) $\sin 3^\circ$ czy $\sin 3$

d) $\sin 4^\circ$ czy $\sin 4$

e) $\sin 5^\circ$ czy $\sin 5$

f) $\sin 6^\circ$ czy $\sin 6$

158. Uprościć wyrażenie, w którym n przebiega liczby naturalne.

a) $\sin n\pi$

b) $\sin n^2\pi$

c) $\cos n\pi$

d) $\cos n^3\pi$

e) $\cos(n^2 + n)\pi$

f) $\sin((2n+1)\pi/2)$

g) $\sin((2n-1)\pi/2)$

Dopuszczalne odpowiedzi: 1, 0, $(-1)^n$, $(-1)^{n+1}$.

159. Dla każdej z liczb $n = 1, 2, 3, \dots, 23$ rozstrzygnąć, czy liczby $\sin n$ oraz $\cos n$ są dodatnie.

160. Rozwiązać równania i nierówności.

a) $\sin x \geq 1/2$

b) $\cos x \leq 1/2$

c) $\sin x \geq \cos x$

d) $[4\sin^2 x] = 2$

e) $\{\cos^2 x\} = 3/4$

f) $\sqrt{1 + \cos x} = \sqrt{2} \cdot \cos(x/2)$

g) $\sin^2 x + \cos^4 x = \cos^2 x + \sin^4 x$

161. Jaka najmniejszą i największą wartość przyjmuje wyrażenie

$$\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x \cdot \cos 16x ?$$

162. Czy funkcja f zdefiniowana podanym wzorem jest parzysta? Nieparzysta?

- a) $f(x) = 0$
- b) $f(x) = 37$
- c) $f(x) = 2x$
- d) $f(x) = 2x^2 + 1$
- e) $f(x) = 14x^5 + 6x^3$
- f) $f(x) = x^6 + x^5$
- g) $f(x) = \sin^{37} x \cdot \cos^{24} x$
- h) $f(x) = \sin^{24} x \cdot \cos^{37} x$
- i) $f(x) = x^{111} \cdot \sin^{24} x \cdot \cos^{37} x$
- j) $f(x) = x^{111} \cdot \sin^{37} x \cdot \cos^{24} x$
- k) $f(x) = x^{666} \cdot \sin^{24} x \cdot \cos^{37} x$
- l) $f(x) = x^{666} \cdot \sin^{37} x \cdot \cos^{24} x$
- m) $f(x) = \sin x^{37}$
- n) $f(x) = \sin x^{24}$
- o) $f(x) = \cos x^{37}$
- p) $f(x) = \cos x^{24}$
- q) $f(x) = (x^2 + 1)\sin x$
- r) $f(x) = (x^2 + 1)\cos x$
- s) $f(x) = (x^3 + 1)\sin x$
- t) $f(x) = (x^3 + 1)\cos x$

163. Dla każdej z liczb $i \in \{1, 2, \dots, 13\}$ wskazać taką liczbę $j \in \{1, 2, \dots, 13\}$, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x

$$f_j(f_i(x)) = x.$$

$$f_1(x) = 37 + x$$

$$f_2(x) = 37 - x$$

$$f_3(x) = x - 37$$

$$f_4(x) = 3x - 2$$

$$f_5(x) = 3x - 4$$

$$f_6(x) = 3x - 6$$

$$f_7(x) = \frac{x}{3} + 2$$

$$f_8(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$$

$$f_9(x) = \frac{x}{3} + \frac{4}{3}$$

$$f_{10}(x) = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{4}|x|$$

$$f_{11}(x) = -\frac{5}{4}x - \frac{3}{4}|x|$$

$$f_{12}(x) = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}|x|$$

$$f_{13}(x) = \frac{5}{4}x - \frac{3}{4}|x|$$

164. Funkcja f spełnia warunki

$$f(3-x) = f(x), \quad f(6-x) = f(x)$$

dla dowolnej liczby rzeczywistej x . Dowieść, że funkcja f jest okresowa i parzysta.

165. Udowodnić podaną nierówność dla odpowiednio dobranej liczby naturalnej $n > 1$.

a) $n^{1000} < 2^n$

b) $1000^n < n!$

c) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > 1000$

d) $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n} > 1000n$

166. Mając narysowany okrąg i jego środek, skonstruować kąt prosty przy użyciu samej linijki.

167. Punkt O jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Wiadomo, że

$$\sphericalangle AOB = \sphericalangle ACB + 60^\circ.$$

Wyznaczyć miarę kąta ACB .

168. To samo pytanie, gdy O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC .

169. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku A ma miarę 30° , a boki AC i BC mają długości odpowiednio $\sqrt{3}$ oraz 1. Wyznaczyć długość boku AB .

170. W trapezie o wysokości 9 ramiona mają długości 15 i 41, a jedna z podstaw ma długość 60. Jaka jest długość drugiej podstawy?

171. Wyznaczyć wszystkie trójkąty prostokątne o bokach długości całkowitej, w których jedna z przyprostokątnych ma długość

a) 7

b) 9

c) 12

172. Niech $0 < a \leq b \leq c$. Dokończyć i uzasadnić:

a) Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt wtedy i tylko wtedy, gdy ...

b) Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt prostokątny wtedy i tylko wtedy, gdy ...

c) Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt rozwartokątny wtedy i tylko wtedy, gdy ...

d) Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt ostrokątny wtedy i tylko wtedy, gdy ...

e) Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt o jednym z kątów mającym miarę 120° wtedy i tylko wtedy, gdy ...

f) Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt o jednym z kątów mającym miarę 60° wtedy i tylko wtedy, gdy ...

173. Środek okręgu opisanego na trójkącie leży na prostej przechodzącej przez jeden z jego wierzchołków i środek przeciwległego boku wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt jest ...

174. W trójkącie o bokach podanej długości wskazać kąt, którego miara wyrażona w stopniach jest liczbą całkowitą.

- a) 3, 4, 5
- b) 3, 5, 7
- c) 3, 7, 8

175. Poniższe warunki dotyczą czworokąta wypukłego. Połączyć je w pary warunków równoważnych.

- a) w czworokąt można wpisać okrąg
- b) na czworokącie można opisać okrąg
- c) czworokąt jest równoległobokiem
- d) czworokąt jest rombem
- e) czworokąt jest prostokątem
- f) sumy miar przeciwległych kątów są równe
- g) sumy długości przeciwległych boków są równe
- h) sumy kwadratów długości przeciwległych boków są równe
- i) przekątne są równej długości i dzielą się na połowy
- j) przekątne są prostopadłe i dzielą się na połowy
- k) przekątne są prostopadłe
- l) przekątne dzielą się na połowy

176. Pole dowolnego wielokąta o obwodzie p opisanego na okręgu o promieniu r jest równe S . Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $p = 12$, $r = 1$, $S = 6$
- b) $p = 16$, $r = 2$, $S = 18$
- c) $p = 20$, $r = 3$, $S = 30$
- d) $p = 24$, $r = 4$, $S = 50$
- e) $p = 28$, $r = 5$, $S = 70$

177. Jeśli w poprzednim zadaniu udzielił(a/e)ś 3 odpowiedzi TAK i 2 odpowiedzi NIE, rozwiąż je ponownie, tym razem poprawnie.

178. Czy istnieje czworokąt, którego boki mają długości (w podanej kolejności)

- a) 1, 3, 10, 15
- b) 2, 4, 10, 15
- c) 3, 27, 10, 15
- d) 4, 30, 10, 15

179. Wyznaczyć położenie punktów styczności okręgu wpisanego w trójkąt o bokach 3, 4, 5 do boków tego trójkąta.

180. Trzy kolejne boki wielokąta opisanego na okręgu mają długości a , b , c (z zachowaniem kolejności). Jaki warunek muszą spełniać a , b , c , aby było to możliwe?

181. Na okręgu opisano pięciokąt o bokach 3, 4, 5, 6, 7 (w tej kolejności). Wyznaczyć położenie punktów styczności okręgu do boków pięciokąta.

182. Pięć kolejnych boków wielokąta opisanego na okręgu ma długości a, b, c, d, e (z zachowaniem kolejności). Wykazać, że wówczas

$$b + d < a + c + e.$$

183. Wykazać, że dla sześciokąta o bokach a, b, c, d, e, f (z zachowaniem kolejności) równość

$$a + c + e = b + d + f$$

jest warunkiem (koniecznym/dostatecznym)¹ na to, aby w sześciokąt można było wpisać okrąg. Pokazać na przykładzie, że nie jest to warunek (konieczny/dostateczny)¹.

184. Podać 4 przykłady parami niepodobnych trójkątów równoramiennych, z których każdy można podzielić na dwa trójkąty równoramienne.

185. Dany jest dwunastokąt foremny $A_1A_2A_3\dots A_{12}$. Dla podanych dwóch przekątnych wskazać trzecią przekątną przechodzącą przez ich punkt przecięcia.

a) A_1A_7, A_3A_9

b) A_1A_5, A_2A_8

c) A_1A_5, A_3A_7

d) A_1A_6, A_4A_9

186. Dany jest jedenastokąt foremny $A_1A_2A_3\dots A_{11}$. Połączyć podane czworokąty w pary czworokątów przystających

a) $A_1A_2A_4A_9$

b) $A_1A_3A_7A_{11}$

c) $A_1A_4A_{10}A_{11}$

d) $A_1A_6A_9A_{10}$

e) $A_1A_4A_6A_{11}$

f) $A_1A_2A_3A_9$

g) $A_1A_6A_8A_{11}$

h) $A_1A_3A_4A_8$

Które czworokąty mają równe pola?

187. Dla których liczb naturalnych $n \geq 3$ poniższe zdanie jest prawdziwe

a) Dowolny n -kąt wpisany w okrąg i mający wszystkie boki równej długości jest foremny.

b) Dowolny n -kąt wpisany w okrąg i mający wszystkie kąty równej miary jest foremny.

c) Dowolny n -kąt opisany na okręgu i mający wszystkie boki równej długości jest foremny.

d) Dowolny n -kąt opisany na okręgu i mający wszystkie kąty równej miary jest foremny.

188. Na płaszczyźnie dany jest trójkąt ABC . Ile co najwyżej może istnieć takich punktów D różnych od C , że proste AB i CD są prostopadłe, a przy tym

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB ?$$

¹niepotrzebne skreślić

Powtórka

Uwaga: Poniższe zadania są zadaniami do samodzielnej powtórki - na zajęciach rozwiążemy tylko część zadań z tej listy.

Proszę umieć wskazać zadania, które wymagają omówienia.

Kolokwia nr 3 (9 czerwca 2011) i 4 (16 czerwca 2011) będą zakładać umiejętność rozwiązania zadań 1-216 oraz umiejętność samodzielnego myślenia.

189. Niech

$$f(x) = \left| \left[x + \frac{1}{2} \right] - x \right|.$$

Naszkicować wykres funkcji f oraz wykresy następujących funkcji

a) $f_1(x) = f(2x)$

b) $f_2(x) = f(x/2)$

c) $f_3(x) = 2f(x)$

d) $f_4(x) = f\left(x + \frac{1}{4}\right)$

e) $f_5(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right)$

f) $f_6(x) = f\left(x - \frac{1}{2}\right)$

g) $f_7(x) = \frac{1}{2} - f(x)$

h) $f_8(x) = f\left(\left|x - \frac{1}{4}\right|\right)$

i) $f_9(x) = \left| f\left(x - \frac{1}{4}\right) \right|$

j) $f_{10}(x) = \frac{f(2x)}{2}$

k) $f_{11}(x) = f(x) + x$

l) $f_{12}(x) = 5f(x) + 3x$

190. Naszkicować wykres funkcji f zdefiniowanej podanym wzorem

a) $f(x) = 1 + \frac{1}{x-1}$

b) $f(x) = \frac{x}{x-1}$

c) $f(x) = 2 + \frac{1}{x+3}$

d) $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$

e) $f(x) = 1 - \frac{1}{|x|}$

f) $f(x) = 1 - \frac{1}{x-2}$

g) $f(x) = 1 - \frac{1}{|x|-2}$

- h) $f(x) = 1 - \frac{1}{|x-2|}$
 i) $f(x) = \left| 1 - \frac{1}{x-2} \right|$
 j) $f(x) = \left| 1 - \frac{1}{|x|-2} \right|$
 k) $f(x) = \left| 1 - \frac{1}{|x-2|} \right|$

191. Dziewięciokąt $A_1A_2A_3\dots A_9$ jest foremny. Wyznaczyć miary kątów trójkąta

- a) $A_1A_3A_7$ b) $A_2A_3A_8$ c) $A_3A_4A_5$

192. Czy liczba $(x^x)^x$ jest wymierna dla

- a) $x = \sqrt{2}$;
 b) $x = \sqrt{6}$;
 c) $x = \sqrt{3}$;
 d) $x = \sqrt{5}$?

193. Czy nierówność $12x < x^2 + 32$ jest prawdziwa dla podanej liczby x (pierwiastek jest w wykładniku)

- a) $x = 2^{\sqrt{3}}$;
 b) $x = 2^{\sqrt{11}}$;
 c) $x = 2^{\sqrt{5}}$;
 d) $x = 2^{\sqrt{7}}$?

194. Liczby rzeczywiste x, y spełniają nierówność $|x - y| < 1$. Czy stąd wynika, że

- a) $|2x + 2y| < 10$;
 b) $|2x - 2y| < 10$;
 c) $|3x - 2y| < 10$;
 d) $|x + y| < 10$?

195. Deltoidem nazywamy dowolny czworokąt wypukły, w którym przekątne są prostopadłe, a jedna z nich dzieli drugą na połowy (ale druga pierwszej już nie musi). Czy stąd wynika, że

- a) w dowolny deltoid można wpisać okrąg;
 b) w dowolnym deltoidzie istnieją dwa sąsiednie boki równej długości;
 c) na dowolnym deltoidzie można opisać okrąg;
 d) w dowolnym deltoidzie istnieją dwa przeciwległe boki równej długości?

196. Czy nierówność

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^m < \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

jest prawdziwa dla

- a) $m = 2007, n = 2008$;
- b) $m = 2008, n = 2010$;
- c) $m = 2007, n = 2009$;
- d) $m = 2008, n = 2009$?

197. Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = \left\{x\right\} - \frac{1}{2},$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x . Czy stąd wynika, że

- a) funkcja f jest parzysta;
- b) funkcja f jest różnowartościowa;
- c) funkcja f jest nieparzysta;
- d) funkcja f jest okresowa?

198. Czy istnieje taka liczba naturalna n , że liczba n^5

- a) jest podzielna przez 2^4 , ale nie jest podzielna przez 2^6 ;
- b) jest podzielna przez 8^7 , ale nie jest podzielna przez 8^8 ;
- c) jest podzielna przez 2^6 , ale nie jest podzielna przez 2^9 ;
- d) jest podzielna przez 4^7 , ale nie jest podzielna przez 4^8 ?

199. Liczby rzeczywiste x, y spełniają nierówność $x^2 + y^2 < 1$. Czy stąd wynika, że

- a) $x + y > 0$;
- b) $x + y < 2$;
- c) $x + y < 1$;
- d) $x + y > 2$?

200. Czy liczba $\log_n(n - 24)$ jest wymierna dla

- a) $n = 25$;
- b) $n = 49$;
- c) $n = 27$;
- d) $n = 32$?

201. Dla dowolnej liczby naturalnej k liczba k^2 jest podzielna przez m wtedy i tylko wtedy, gdy liczba k^2 jest podzielna przez n . Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $m = 4, n = 8$;
- b) $m = 9, n = 27$;
- c) $m = 3, n = 9$;
- d) $m = 8, n = 16$?

202. Czy równość $\cos \alpha = \sin(4\alpha)$ jest prawdziwa dla

- a) $\alpha = 18^\circ$;
- b) $\alpha = 45^\circ$;
- c) $\alpha = 24^\circ$;
- d) $\alpha = 30^\circ$?

203. Dla dowolnej liczby naturalnej k liczba k jest podzielna przez $(n+1)!$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczba k jest podzielna przez $n!$ i przez $n+1$. Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $n = 10$;
- b) $n = 16$;
- c) $n = 11$;
- d) $n = 14$?

204. Czy podana liczba jest podzielna przez 2^{100}

- a) $1234567890987654321160^{35}$;
- b) $1234567890987654321036^{55}$;
- c) $1234567890987654321222^{65}$;
- d) $1234567890987654321100^{45}$?

205. Czy prawdziwa jest nierówność

- a) $\sqrt{10} - 3 < 1/6$;
- b) $\sqrt{37} - 6 < 1/11$;
- c) $\sqrt{17} - 4 < 1/6$;
- d) $\sqrt{26} - 5 < 1/11$?

206. Czy prawdziwa jest nierówność

- a) $11111^2 + 22222^2 < 4 \cdot 11111^2$;
- b) $11111^5 + 22222^5 < 27 \cdot 11111^5$;
- c) $11111^3 + 22222^3 < 9 \cdot 11111^3$;
- d) $11111^4 + 22222^4 < 25 \cdot 11111^4$?

207. Czy nierówność $\log_a 2 < \log_a 3$ jest prawdziwa dla

- a) $a = \log_2 3$;
- b) $a = \sqrt{3} - 1$;
- c) $a = \log_3 2$;
- d) $a = \sqrt{5} - 1$?

208. Czy równość $2^m \cdot 4^n = 8^{m+n}$ jest prawdziwa dla

- a) $m = 1, n = 2$;
- b) $m = 4, n = -2$;
- c) $m = 2, n = -4$;
- d) $m = 3, n = 3$?

209. Obliczyć wartości podanych wyrażeń. $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x .

- a) $\left[\log_2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{64} \right) \right] = \dots$
- b) $\left[\log_3 (\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7} + \sqrt{10}) \right] = \dots$
- c) $\left[\log_2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{128} \right) \right] = \dots$
- d) $\left[\log_2 (\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7} + \sqrt{10}) \right] = \dots$

210. Podać wartość logarytmu $\log_a b$ w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego, jeżeli $b = \sqrt{2}$ oraz

- a) $a = \sqrt[4]{4}, \log_a b = \dots$
- b) $a = \sqrt[32]{32}, \log_a b = \dots$
- c) $a = \sqrt[8]{8}, \log_a b = \dots$
- d) $a = \sqrt[16]{16}, \log_a b = \dots$

211. Dany jest 13-kąt foremny $A_1 A_2 A_3 \dots A_{13}$. Dla podanych i, j wskazać taką liczbę k , że trójkąt $A_i A_j A_k$ jest trójkątem równoramiennym ostrokątnym

- a) $i = 1, j = 2, k = \dots$
- b) $i = 1, j = 7, k = \dots$
- c) $i = 1, j = 5, k = \dots$
- d) $i = 1, j = 6, k = \dots$

212. Podać zbiór rozwiązań nierówności w liczbach rzeczywistych $x \in [0, \pi]$

- a) $\sin x < 1/2$
- b) $\cos x < \sin 2x$
- c) $\sin x < \cos x$
- d) $\sin x < \sin 2x$

213. Podać przykład takich liczb naturalnych m, n , że

$$\text{NWD}(m, n) < m < n < \text{NWW}(m, n),$$

a ponadto

- a) $\text{NWD}(m, n) = 1$, $\text{NWW}(m, n) = 15$, $m = \dots$ $n = \dots$
- b) $\text{NWD}(m, n) = 1$, $\text{NWW}(m, n) = 30$, $m = \dots$ $n = \dots$
- c) $\text{NWD}(m, n) = 2$, $\text{NWW}(m, n) = 24$, $m = \dots$ $n = \dots$
- d) $\text{NWD}(m, n) = 3$, $\text{NWW}(m, n) = 36$, $m = \dots$ $n = \dots$

214. Podać miarę β kąta wewnętrznego n -kąta wypukłego, jeżeli wiadomo, że każdy z pozostałych $n-1$ kątów ma miarę α .

- a) $n = 3$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = \dots$
- b) $n = 6$, $\alpha = 140^\circ$, $\beta = \dots$
- c) $n = 4$, $\alpha = 100^\circ$, $\beta = \dots$
- d) $n = 5$, $\alpha = 100^\circ$, $\beta = \dots$

215. Podać zbiór rozwiązań nierówności

- a) $x^2 < x$
- b) $x^3 < 64x^2$
- c) $x^3 < x$
- d) $x^4 < 16x^2$

216. W dowolnym n -kącie wypukłym liczba przekątnych jest k razy większa od liczby boków. Powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $k = 2$ oraz $n = \dots$
- b) $k = 10$ oraz $n = \dots$
- c) $k = 3$ oraz $n = \dots$
- d) $k = 5$ oraz $n = \dots$