

1. Podzielność, liczby pierwsze.

Uwaga: Przyjmujemy, że 0 nie jest liczbą naturalną, tzn. liczby naturalne są to liczby całkowite dodatnie.

1. Dane są liczby naturalne m, n . Wówczas dla dowolnej liczby naturalnej k , liczba k jest podzielna jednocześnie przez m oraz n wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez

Ponadto, jeżeli, to dla dowolnej liczby naturalnej k , liczba k jest podzielna jednocześnie przez m oraz n wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez mn .

2. W liczbie 3?20000001?5 wpisać w miejsce obu znaków zapytania taką samą cyfrę tak, aby otrzymać liczbę podzielną przez 75. Podać wszystkie rozwiązania.

3. W liczbie 3120000001?? wpisać w miejsce znaków zapytania takie cyfry (mogą być różne), aby otrzymać liczbę dającą przy dzieleniu przez 72 resztę 5. Podać wszystkie rozwiązania.

4. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne d , dla których prawdziwa jest następująca cecha podzielności przez d :

Dla dowolnej liczby naturalnej k , liczba k jest podzielna przez d wtedy i tylko wtedy, gdy liczba utworzona przez dwie ostatnie cyfry liczby k jest podzielna przez d .

5. Jakie reszty może dawać kwadrat liczby całkowitej przy dzieleniu przez 3? Przez 8? Przez 5?

6. Jakie reszty może dawać sześćcian liczby całkowitej przy dzieleniu przez 7? Przez 9?

7. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n > 1$, dla których liczba $n^2 - 1$ jest pierwsza.

8. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p , dla których liczba $3p + 1$ jest pierwsza.

9. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p , dla których liczba $p^2 + 2$ jest pierwsza.

10. Czy istnieją liczby naturalne m, n spełniające równanie

$$6^m = 12^n ?$$

11. Czy istnieją liczby naturalne m, n, k spełniające równanie

$$6^m \cdot 12^n = 18^k ?$$

12. Czy istnieją liczby naturalne m, n, k spełniające równanie

$$18^m \cdot 24^n = 12^k ?$$

13. Wskazać takie liczby naturalne m, n , że

$$m^3 n^4 = 2^{11} \cdot 3^7 \cdot 5^{13}.$$

14. Która liczba jest większa, $2^8 \cdot 18^{10}$ czy $12^5 \cdot 3^7$?

15. Ile zer końcowych ma liczba $33!$?

16. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne d o następującej własności: Dla dowolnych liczb naturalnych m, n , jeżeli iloczyn mn jest podzielny przez 7, to co najmniej jedna z liczb m, n jest podzielna przez d .

17. To samo z liczbą 24 zamiast 7.

18. Obliczyć NWD($24!$, 24^{24}).

19. Obliczyć NWW(12^{12} , 18^{18}).

20. Dowieść, że liczba naturalna o sumie cyfr równej 47 nie może być ani kwadratem, ani sześcianiem liczby całkowitej.

21. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $n^2 - n$ jest parzysta, liczba $n^3 - n$ jest podzielna przez 6, a liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 30.

Wskazówka: $n^5 - n = (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2) + \text{coś}$.