

105. Niech

$$f(x) = \left| \left[x + \frac{1}{2} \right] - x \right|.$$

Naszkicować wykres funkcji f oraz wykresy następujących funkcji

a) $f_1(x) = f(2x)$

b) $f_2(x) = f(x/2)$

c) $f_3(x) = 2f(x)$

d) $f_4(x) = f\left(x + \frac{1}{4}\right)$

e) $f_5(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right)$

f) $f_6(x) = f\left(x - \frac{1}{2}\right)$

g) $f_7(x) = \frac{1}{2} - f(x)$

h) $f_8(x) = f\left(\left|x - \frac{1}{4}\right|\right)$

i) $f_9(x) = \left| f\left(x - \frac{1}{4}\right) \right|$

j) $f_{10}(x) = \frac{f(2x)}{2}$

k) $f_{11}(x) = f(x) + x$

l) $f_{12}(x) = 5f(x) + 3x$

106. Naszkicować wykres funkcji f zdefiniowanej podanym wzorem

a) $f(x) = 1 + \frac{1}{x-1}$

b) $f(x) = \frac{x}{x-1}$

c) $f(x) = 2 + \frac{1}{x+3}$

d) $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$

e) $f(x) = 1 - \frac{1}{|x|}$

f) $f(x) = 1 - \frac{1}{x-2}$

$$\textbf{g)} \quad f(x) = 1 - \frac{1}{|x| - 2}$$

$$\textbf{h)} \quad f(x) = 1 - \frac{1}{|x - 2|}$$

$$\textbf{i)} \quad f(x) = \left| 1 - \frac{1}{x - 2} \right|$$

$$\textbf{j)} \quad f(x) = \left| 1 - \frac{1}{|x| - 2} \right|$$

$$\textbf{k)} \quad f(x) = \left| 1 - \frac{1}{|x - 2|} \right|$$

107. Dla każdej z liczb $i \in \{1, 2, \dots, 17\}$ wskazać taką liczbę $j \in \{1, 2, \dots, 17\}$, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x

$$f_j(f_i(x)) = x.$$

$$f_1(x) = 37 + x$$

$$f_2(x) = 37 - x$$

$$f_3(x) = x - 37$$

$$f_4(x) = 3x - 2$$

$$f_5(x) = 3x - 4$$

$$f_6(x) = 3x - 6$$

$$f_7(x) = \frac{x}{3} + 2$$

$$f_8(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$$

$$f_9(x) = \frac{x}{3} + \frac{4}{3}$$

$$f_{10}(x) = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{4}|x|$$

$$f_{11}(x) = -\frac{5}{4}x - \frac{3}{4}|x|$$

$$f_{12}(x) = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}|x|$$

$$f_{13}(x) = \frac{5}{4}x - \frac{3}{4}|x|$$

$$f_{14}(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}|x|$$

$$f_{15}(x) = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}|x|$$

$$f_{16}(x) = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}|x|$$

$$f_{17}(x) = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}|x|$$

108. Funkcja f spełnia warunki

$$f(3-x) = f(x), \quad f(6-x) = f(x)$$

dla dowolnej liczby rzeczywistej x . Dowieść, że funkcja f jest okresowa i parzysta.

109. Udowodnić podaną nierówność dla odpowiednio dobranej liczby naturalnej $n > 1$.

a) $n^{1000} < 2^n$

b) $1000^n < n!$

c) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > 1000$

d) $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n} > 1000n$

110. Mając narysowany okrąg i jego środek, skonstruować kąt prosty przy użyciu samej linijki.

111. Punkt O jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Wiadomo, że

$$\sphericalangle AOB = \sphericalangle ACB + 60^\circ.$$

Wyznaczyć miarę kąta ACB .

To samo pytanie, gdy O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC .

112. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku A ma miarę 30° , a boki AC i BC mają długości odpowiednio $\sqrt{3}$ oraz 1 . Wyznaczyć długość boku AB .

113. W trapezie o wysokości 9 ramiona mają długości 15 i 41 , a jedna z podstaw ma długość 60 . Jaka jest długość drugiej podstawy?

114. Wyznaczyć wszystkie trójkąty prostokątne o bokach długości całkowitej, w których jedna z przyprostokątnych ma długość

- a) 7
- b) 9
- c) 12

115. Dokończyć i uzasadnić:

- a) Z odcinków o długościach a , b , c można zbudować trójkąt wtedy i tylko wtedy, gdy ...
- b) Z odcinków o długościach a , b , c można zbudować trójkąt ostrokątny wtedy i tylko wtedy, gdy ...
- c) Środek okręgu opisanego na trójkącie leży na prostej przechodzącej przez jeden z jego wierzchołków i środek przeciwległego boku wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt jest ...

116. W trójkącie o bokach podanej długości wskazać kąt, którego miara wyrażona w stopniach jest liczbą całkowitą.

- a) 3, 4, 5
- b) 3, 5, 7
- c) 3, 7, 8

117. Poniższe warunki dotyczą czworokąta wypukłego. Połączyć je w pary warunków równoważnych.

- a) w czworokąt można wpisać okrąg
- b) na czworokącie można opisać okrąg
- c) czworokąt jest równoległobokiem
- d) czworokąt jest rombem
- e) czworokąt jest prostokątem
- f) sumy miar przeciwległych kątów są równe
- g) sumy długości przeciwległych boków są równe
- h) sumy kwadratów długości przeciwległych boków są równe
- i) przekątne są równej długości i dzielą się na połowy
- j) przekątne są prostopadłe i dzielą się na połowy
- k) przekątne są prostopadłe
- l) przekątne dzielą się na połowy