

Logarytmy

46. Uprościć wyrażenia

- a) $4^{2+\log_2 7}$
- b) $\log_{\sqrt{3}} 2 \cdot \log_5 9$
- c) $\log_6 2 + \log_{36} 9$

47. Dla ilu trójek liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c różnych od 1 spełniona jest podana równość? Dla wszystkich? Dla żadnej? Dla niektórych (podać 3 przykłady, a jeśli przykładów jest mniej niż 3, podać wszystkie)?

- a) $\log_a(bc) = (\log_a b) + \log_a c$
- b) $\log_a(bc) = (\log_a b) \cdot \log_a c$
- c) $\log_a(b+c) = (\log_a b) \cdot \log_a c$
- d) $\log_a(b+c) = (\log_a b) + \log_a c$
- e) $(\log_a b) \cdot \log_b c = \log_a c$
- f) $\log_a(b^c) = c \cdot \log_a b$
- g) $\log_a(b^c) = (\log_a b)^c$

48. Bez użycia kalkulatora rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

- a) $\log_2 7$ czy $\log_3 7$
- b) $\log_{0,2} 7$ czy $\log_{0,3} 7$
- c) $\log_2 7$ czy $\log_{0,3} 7$
- d) $\log_{0,2} 7$ czy $\log_3 7$
- e) $\log_2 0,7$ czy $\log_3 0,7$
- f) $\log_{0,2} 0,7$ czy $\log_{0,3} 0,7$
- g) $\log_2 0,7$ czy $\log_{0,3} 0,7$
- h) $\log_{0,2} 0,7$ czy $\log_3 0,7$
- i) $\log_9 27$ czy $\log_4 8$
- j) $\log_3 8$ czy $\log_2 5$
- k) $\log_5 127$ czy $\log_{10} 999$
- l) $\log_3 100$ czy $\log_2 10$
- m) $(\log_2 3) \cdot \log_5 7$ czy $(\log_2 7) \cdot \log_5 3$
- n) $(\log_2 3) \cdot \log_7 5$ czy $(\log_7 9) \cdot \log_{16} 25$
- o) $\log_2 3$ czy $\log_3 5$

Rozwiązanie II:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest wymierna i oznaczmy ją przez w . Wtedy

$$w = \sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$$

$$w + \sqrt{2} = \sqrt{3-\sqrt{8}}$$

$$w^2 + 2\sqrt{2}w + 2 = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2}(w+1) + (w-1)(w+1) = 0$$

Dzieląc ostatnią równość przez $w+1$ otrzymujemy

$$2\sqrt{2} + w - 1 = 0,$$

co stanowi sprzeczność z założeniem wymierności liczby w , gdyż lewa strona równości jest liczbą niewymierną i nie może być równa 0.

Czy powyższe rozwiązania są poprawne?

54. Liczby a i b są dodatnie i niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba $a+b$ jest niewymierna?

55. Dla których liczb naturalnych m i n większych od 1 liczba

$$\frac{\log_m(mn) \cdot \log_n(mn)}{\log_m(mn) + \log_n(mn)}$$

jest wymierna, a dla których niewymierna?

56. Czy liczba $\log_{(\sqrt{2}-1)}(\sqrt{2}+1)$ jest wymierna czy niewymierna?

57. Czy liczba

$$2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2}$$

jest wymierna czy niewymierna?

58. Liczby $a+b$, $b+c$ i $c+a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a , b , c są wymierne?

59. Liczby $a+b$, $b+c$ i $c+a$ są niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba $a+b+c$ jest niewymierna?

60. Liczby $a+b$, $b+c$, $c+d$ i $d+a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a , b , c , d są wymierne?

61. Niech n będzie liczbą naturalną. Mając do dyspozycji nawiasy, n , liczby całkowite oraz znaki $+$, $-$, $\cdot$, $:$ i $\sqrt{\quad}$ zapisać liczbę niewymierną dodatnią mniejszą od $\frac{1}{n}$.

62. Suma wyrazów rosnącego postępu arytmetycznego 2007-wyrazowego o wyrazach dodatnich jest liczbą wymierną. Czy stąd wynika, że co najmniej jeden wyraz postępu jest liczbą wymierną?

63. To samo pytanie dla postępu 2008-wyrazowego.

TEST: 20 przykładów.

Odpowiedzi, których poprawności nie da się uzasadnić elementarnie, nie mogą być zaliczone. Wszystkie przykłady można podać bez używania operacji bardziej skomplikowanych niż logarytmy i pierwiastki.

64. Dać przykład takiej liczby rzeczywistej x , że

- a) $0 < x < 1$ oraz x jest niewymierna,
- b) $\sqrt{5} < x < \sqrt{6}$ oraz x jest wymierna,
- c) x^2 i x^3 są niewymierne, ale x^5 jest wymierna,
- d) x^4 i x^6 są wymierne, ale x^5 jest niewymierna,
- e) $(x+1)^2$ jest niewymierna,
- f) x jest niewymierna, ale $x + \frac{1}{x}$ jest wymierna,
- g) x jest niewymierna i 2^x jest niewymierna,
- h) $2^x + 3^x$ jest liczbą niewymierną,
- i) $2^x + 3^x$ jest liczbą wymierną,
- j) $\log_2 x + \log_3 x$ jest liczbą niewymierną,
- k) $\log_2 x + \log_3 x$ jest liczbą wymierną,
- l) $\log_2 x \cdot \log_3 x$ jest liczbą niewymierną,
- m) $\log_2 x \cdot \log_3 x$ jest liczbą wymierną,
- n) $2^x + \log_2 x$ jest liczbą całkowitą dodatnią,
- o) $2^x + \log_2 x$ jest liczbą niewymierną,
- p) $x + \log_2 x$ jest liczbą wymierną niecałkowitą,
- q) $x^{\sqrt{2}}$ jest liczbą wymierną niecałkowitą,
- r) $x^{\sqrt{2}}$ jest liczbą niewymierną,
- s) $\log_x(1+x)$ jest liczbą wymierną,
- t) $\log_x(1+x)$ jest liczbą niewymierną.