1. Elementy szkolnej teorii liczb: liczby naturalne, podzielność, silnie, reszty z dzielenia kwadratów i sześcianów przez małe liczby, liczby pierwsze, jednoznaczność rozkładu na czynniki pierwsze (bez dowodu), największy wspólny dzielnik, najmniejsza wspólna wielokrotność, algorytm Euklidesa, cechy podzielności przez 2, 4, 8, 5, 25, 125, 3, 9.

Uwaga: Przyjmujemy, że 0 nie jest liczbą naturalną, tzn. liczby naturalne są to liczby całkowite dodatnie. Zaznaczyć jednak należy, że nie ma w tej kwestii uzgodnionego nazewnictwa i w wielu podręcznikach liczba 0 jest uważana za liczbę naturalną.

1. Uzupełnić cechę podzielności przez 9:
Dla dowolnej liczby naturalnej k, liczba k jest podzielna przez 9 wtedy i tylko wtedy, gdy .... jest podzielna przez 9.

2. Uzupełnić uogólnioną cechę podzielności przez 9:
Dla dowolnej liczby naturalnej k, liczba k przy dzieleniu przez 9 daje taką samą resztę, jaką przy dzieleniu przez 9 daje ....

3. Skrytykować i poprawić podane sformułowanie cechy podzielności przez 4.
Liczba jest podzielna przez 4 wtedy i tylko wtedy, gdy jej dwie ostatnie cyfry są podzielne przez 4.

4. Uzupełnić cechę podzielności przez 12:
Dla dowolnej liczby naturalnej k, liczba k jest podzielna przez 12 wtedy i tylko wtedy, gdy suma cyfr liczby k ...., a liczba utworzona przez dwie ostatnie cyfry liczby k ....

5. Wyjaśnić i poprawić błąd w następującym wyprowadzeniu cechy podzielności przez 24:
Dla dowolnej liczby naturalnej k, liczba k jest podzielna przez 24 wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez 4 i 6. Liczba jest podzielna przez 4 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba utworzona przez jej dwie ostatnie cyfry jest podzielna przez 4. Liczba jest podzielna przez 6 wtedy i tylko wtedy, gdy jej cyfra jedności jest parzysta, a suma jej cyfr jest podzielna przez 3. Łącząc powyższe otrzymujemy:
Dla dowolnej liczby naturalnej k, liczba k jest podzielna przez 24 wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące trzy warunki:
(i) liczba utworzona przez dwie ostatnie cyfry liczby k jest podzielna przez 4,
(ii) suma cyfr liczby k jest podzielna przez 3,
(iii) cyfra jedności liczby k jest parzysta.

6. Czy podana cecha podzielności przez 4 jest poprawna? Jeśli nie, to na czym polega błąd i jak go naprawić?
Dla dowolnej liczby naturalnej k, liczba k jest podzielna przez 4 wtedy i tylko wtedy,

gdy liczba utworzona przez trzy ostatnie cyfry liczby k jest podzielna przez 4.

7. W liczbie 3?20000001?5 wpisać w miejsce obu znaków zapytania taką samą cyfrę tak, aby otrzymać liczbę podzielną przez 75. Podać wszystkie rozwiązania.

8. W liczbie 3120000001?? wpisać w miejsce znaków zapytania takie cyfry (mogą być różne), aby otrzymać liczbę dającą przy dzieleniu przez 72 resztę 5. Podać wszystkie rozwiązania.

9. Podać, bez wykonywania bezpośrednich obliczeń, trzy ostatnie cyfry liczby 23!

10. Która z liczb jest większa
a) $10!$ czy 10^{10} ?
b) $20!$ czy 10^{10} ?
c) $20!$ czy $(10!)^2$?
d) $100!$ czy $(10!)^{10}$?
e) $10!$ czy $6!\cdot 7!$?

11. Niech n będzie liczbą naturalną. Jaką resztę daje
a) liczba $7n+8$ przy dzieleniu przez 7 ?
b) liczba $6n+11$ przy dzieleniu przez 3 ?
c) liczba $10n-3$ przy dzieleniu przez 10 ?
d) liczba $10n-23$ przy dzieleniu przez 10 ?
e) liczba $10n-23$ przy dzieleniu przez 10, jeżeli $n=1$?

12. Dowieść, że w ciągu 3, 6, 12, 15, 21, 24, 30, 33, 39, ..., w którym każdy kolejny wyraz powstaje z poprzedniego przez dodanie sumy cyfr, nie występuje liczba 2008.

13. Jakie reszty może dawać kwadrat liczby całkowitej przy dzieleniu przez 3? Przez 4? Przez 8? Przez 5?

14. Jakie reszty może dawać sześcian liczby całkowitej przy dzieleniu przez 7? Przez 9?

15. Dowieść, że liczba naturalna o sumie cyfr równej 47 nie może być ani kwadratem, ani sześcianem liczby całkowitej.

16. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne d, dla których prawdziwa jest następująca cecha podzielności przez d:
Dla dowolnej liczby naturalnej k, liczba k jest podzielna przez d wtedy i tylko wtedy, gdy liczba utworzona przez dwie ostatnie cyfry liczby k jest podzielna przez d.

17. Uzupełnić cechę podzielności przez 1125:
Dla dowolnej liczby naturalnej k, liczba k jest podzielna przez 1125 wtedy i tylko wtedy, gdy suma cyfr liczby k ...., a liczba utworzona przez .... ostatnie cyfry liczby k ....

18. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba n^2-n jest parzysta, liczba n^3-n jest podzielna przez 6, a liczba n^5-n jest podzielna przez 30.
Wskazówka: $n^5-n=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)+$coś.

19. Wyznaczyć wszytskie liczby naturalne $n>1$, dla których liczba n^2-1 jest pierwsza.

20. Wyznaczyć wszytskie liczby pierwsze p, dla których liczba $3p+1$ jest pierwsza.

21. Wyznaczyć wszytskie liczby pierwsze p, dla których liczba p^2+2 jest pierwsza.

22. Czy istnieją liczby naturalne m, n spełniające równanie

$$6^m=12^n\ ?$$

23. Czy istnieją liczby naturalne m, n, k spełniające równanie

$$6^m\cdot 12^n=18^k\ ?$$

24. Czy istnieją liczby naturalne m, n, k spełniające równanie

$$18^m\cdot 24^n=12^k\ ?$$

25. Wskazać takie liczby naturalne m, n, że

$$m^3n^4=2^{11}\cdot 3^7\cdot 5^{13}\,.$$

26. Która liczba jest większa, $2^8\cdot 18^{10}$ czy 6^{19} ?

27. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne d o następującej własności: Dla dowolnych liczb naturalnych m, n, jeżeli iloczyn mn jest podzielny przez 7, to co najmniej jedna z liczb m, n jest podzielna przez d.

28. To samo z liczbą 24 zamiast 7.

29. Obliczyć NWD$(24!, 24^{24})$.

30. Obliczyć NWW$(12^{12}, 18^{18})$.

31. Ile zer końcowych ma liczba 33! ?

32. Niech $a=2^4\cdot 3^7\cdot 5^9$, $b=2^6\cdot 3^{11}\cdot 5^5$, $c=2^{10}\cdot 3^3\cdot 7^2$.
Obliczyć NWD(a,b,c) oraz NWW(a,b,c).

33. Niech $a=2^4\cdot 3^7\cdot 6^9$, $b=2^6\cdot 3^{11}\cdot 4^5$, $c=2^{10}\cdot 3^3\cdot 10^2$.
Obliczyć NWD(a,b,c) oraz NWW(a,b,c).

34. Na wyspach Bergamutach podobno jest kot w butach i podobno używają tam tylko liczb naturalnych dających przy dzieleniu przez 3 resztę 1. To ograniczenie nie pozwala na wykonywanie dodawania, ale mnożenie nie sprawia kłopotu. Można też bez problemu mówić o podzielności liczb. Liczba 4 jest uważana za liczbę pierwszą, bo oprócz

1 i 4 nie ma żadnego innego dzielnika spośród liczb używanych na Bergamutach. Które spośród liczb mniejszych od 30 są na Bergamutach uważane za pierwsze, a które za złożone? Czy na Bergamutach prawdziwe jest twierdzenie o jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze?

35. Połączyć podane warunki w grupy warunków równoważnych dla dowolnej liczby naturalnej n.
a) liczba n jest nieparzysta
b) liczba n jest względnie pierwsza z 6
c) jedna z liczb $n-1$, $n+1$ jest podzielna przez 4
d) jedna z liczb $n-1$, $n+1$ jest podzielna przez 6
e) jedna z liczb $n-1$, $n+1$ jest podzielna przez 8
f) liczba n^2-1 jest podzielna przez 4
g) liczba n^2-1 jest podzielna przez 8
h) liczba n^2-1 jest podzielna przez 12
i) liczba n^2-1 jest podzielna przez 16
j) liczba n^2-1 jest podzielna przez 24

36. Niech $n!!=n(n-2)(n-4)...$ będzie iloczynem liczb naturalnych nie większych od n i będących tej samej parzystości, co n. Ile zer końcowych mają liczby 34!! oraz 35!! ?

37. Dowieść, że iloczyn dowolnych czterech kolejnych liczb naturalnych powiększony o jeden jest kwadratem liczby całkowitej.

38. Obliczyć
a) $\mathrm{NWD}(254678914^{37}, 10^{43})$
b) $\mathrm{NWD}(472851364^{43}, 2^{50})$
c) $\mathrm{NWD}(100000008^{25}, 12^{16})$
d) $\mathrm{NWD}(100000011^{44}, 300^{300})$
e) $\mathrm{NWD}(200000004^{31}, 24^{24})$
f) $\mathrm{NWD}(18465210275^{44}, 10^{47})$
g) $\mathrm{NWD}(7771428426328^{60}, 14^{37})$
h) $\mathrm{NWD}(1122334455666^{50}, 44^{37})$
i) $\mathrm{NWD}(12468945716272^{29}, 14^{17}, 330^{23})$
j) $\mathrm{NWD}(1352263965789126^{44}, 26^{19}, 39^{22})$
k) $\mathrm{NWD}(1028, 1040)$
l) $\mathrm{NWD}(1038, 1050)$
m) $\mathrm{NWD}(2\cdot 10^{100}+1, 5\cdot 10^{100}+7)$

39. Wskazać najmniejszą (o ile taka w ogóle istnieje) liczbę naturalną k, dla której podane wynikanie jest prawdziwe dla dowolnych liczb naturalnych m, n i (ewentualnie) r.
a) $3^k|mn \Rightarrow (3^3|m \vee 3^3|n)$
b) $5^k|mn \Rightarrow (5^2|m \vee 5^7|n)$

c) $7^k|mnr \Rightarrow (7^5|m \vee 7^3|n \vee 7^{12}|r)$
d) $4^k|mnr \Rightarrow (4^5|m \vee 4^3|n \vee 4^{12}|r)$
e) $6^k|mnr \Rightarrow (6^5|m \vee 6^3|n \vee 6^{12}|r)$

40. Uporządkować podane liczby w kolejności rosnącej
$a = 90 \cdot 60^9$
$b = 15^3 \cdot 120^7$
$c = 2^7 \cdot 30^{11}$
$d = 60^{10}$
$e = 40^6 \cdot 45^5$
$f = 72^6 \cdot 5^{10}$
$g = 5^{11} \cdot 50000^2$

41. Pani napisała na tablicy pewną liczbę naturalną. Troje uczniów spostrzegło i wypowiedziało pewne własności napisanej liczby. Niestety, tylko dwoje uczniów podało własności poprawne, a trzeci uczeń się pomylił. Który uczeń popełnił błąd?

Wersja I

Przemek: Napisana liczba jest kwadratem liczby całkowitej.
Edgar: Suma cyfr napisanej liczby jest równa 38.
Gosia: Napisana liczba przy dzieleniu przez 9 daje resztę 2.

Wersja II

Przemek: Napisana liczba jest kwadratem liczby całkowitej.
Edgar: Suma cyfr napisanej liczby jest równa 32.
Gosia: Napisana liczba przy dzieleniu przez 9 daje resztę 7.

Wersja III

Przemek: Napisana liczba jest kwadratem liczby całkowitej.
Edgar: Suma cyfr napisanej liczby jest równa 19.
Gosia: Napisana liczba przy dzieleniu przez 9 daje resztę 3.

Wersja IV

Przemek: Napisana liczba jest kwadratem liczby całkowitej.
Edgar: Suma cyfr napisanej liczby jest równa 2004.
Gosia: Napisana liczba kończy się cyframi 2005.

Wersja V

Przemek: Napisana liczba jest sześcianem liczby całkowitej.
Edgar: Napisana liczba kończy się cyframi 444.
Gosia: Napisana liczba jest nieparzysta.

Wersja VI

Przemek: Napisana liczba jest sześcianem liczby całkowitej.
Edgar: Napisana liczba kończy się cyframi 2222.
Gosia: Suma cyfr napisanej liczby jest równa 43.