13. Liczby wymierne i niewymierne, dowody niewymierności liczb wyrażonych przez pierwiastki i logarytmy.

160. Dowieść, że liczba $\log_2 3$ jest niewymierna.

161. Dowieść, że liczba $\log_{12} 18$ jest niewymierna.

162. Czy liczba $0,(9)=0,999999\ldots$ jest wymierna czy niewymierna?

163. Niech
$$x=1+2+4+8+16+32+\ldots$$
Wówczas
$$x=1+2\cdot 1+2\cdot 2+2\cdot 4+2\cdot 8+2\cdot 16+2\cdot 32+\ldots=$$
$$=1+2\cdot(1+2+4+8+16+32+\ldots)=1+2x\,,$$
skąd $x=-1$.

Jak to możliwe, że suma liczb dodatnich jest ujemna?

164. Obliczyć podając wynik w postaci ułamka zwykłego

a) $\sqrt{0,(4)}+\sqrt[3]{3,374(9)}$

b) $(0,2(9)+1,(09))\cdot 12,(2)$

c) $(0,(037))^{0,(3)}$

165. Dowieść, że podane liczby są niewymierne

a) $\sqrt{2}$

b) $\sqrt[m]{n}$, jeżeli n jest liczbą naturalną niebędącą m-tą potęgą liczby naturalnej

c) $\sqrt{5}+\sqrt{7}$

d) $\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$

e) $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$

f) $\log_m n$, jeżeli liczby naturalne $m,n>1$ nie są potęgami tej samej liczby naturalnej

166. Rozstrzygnąć, czy liczba $\log_2 3+\log_4 5$ jest wymierna czy niewymierna.

Oszustwo **167.**

Zadanie: Dowieść, że liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest niewymierna.

Rozwiązanie I:

Liczba $-\sqrt{2}$ jest niewymierna. Także liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}$ jest niewymierna, bo gdyby była wymierna, to jej kwadrat $3-\sqrt{8}$ też byłby liczbą wymierną, a nie jest. Zatem liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest niewymierna jako suma liczb niewymiernych.

Rozwiązanie II:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest wymierna i oznaczmy ją przez w. Wtedy
$$w=\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$$
$$w+\sqrt{2}=\sqrt{3-\sqrt{8}}$$
$$w^2+2\sqrt{2}w+2=3-2\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2}(w+1)+(w-1)(w+1)=0$$

Dzieląc ostatnią równość przez $w+1$ otrzymujemy

$$2\sqrt{2}+w-1=0,$$

co stanowi sprzeczność z założeniem wymierności liczby w, gdyż lewa strona równości jest liczbą niewymierną i nie może być równa 0.

Czy powyższe rozwiązania są poprawne?

OSZUSTWO **168.**
ZADANIE: Dowieść, że liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{2}$ jest niewymierna.
ROZWIĄZANIE:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{2}$ jest wymierna i oznaczmy ją przez w. Wtedy

$$w=\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{2}$$

$$w-\sqrt{2}=\sqrt{3-\sqrt{8}}$$

$$w^2-2\sqrt{2}w+2=3-2\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2}(-w+1)+(w-1)(w+1)=0$$

Dzieląc ostatnią równość przez $w-1$ otrzymujemy

$$-2\sqrt{2}+w+1=0,$$

co stanowi sprzeczność z założeniem wymierności liczby w, gdyż lewa strona równości jest liczbą niewymierną i nie może być równa 0.

W powyższym rozwiązaniu wykonujemy dzielenie przez $w-1$, co jest dozwolone pod warunkiem, że $w-1$ jest różne od zera. Tak więc poprawnie jest udowodniony następujący fakt:
Liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{2}$ jest niewymierna lub równa 1.

Pozostaje sprawdzić, czy w istocie zachodzi równość

$$\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{2}=1\,.$$

Przekształcając otrzymujemy kolejno

$$\sqrt{3-\sqrt{8}}=-\sqrt{2}+1$$

$$3-\sqrt{8}=\left(-\sqrt{2}+1\right)^2$$

$$3-\sqrt{8}=2-2\sqrt{2}+1$$

$$3-\sqrt{8}=3-\sqrt{8}\,,$$

a więc w istocie dana w zadaniu liczba jest równa 1, czyli jest liczbą wymierną.

Jak to jednak możliwe, że

$$\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{2}=1\,,$$

skoro po lewej stronie występuje liczba większa od $\sqrt{2}$, a więc tym bardziej większa od 1?

169. Liczby a i b są dodatnie i niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba $a+b$ jest niewymierna?

170. Czy liczba $\log_{(\sqrt{2}-1)}(\sqrt{2}+1)$ jest wymierna czy niewymierna?

171. Dowieść, że suma liczby wymiernej i liczby niewymiernej jest liczbą niewymierną.

172. Czy iloczyn liczby wymiernej i liczby niewymiernej jest zawsze liczbą niewymierną?

173. Liczby $a+b$, $b+c$ i $c+a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a, b, c są wymierne?

174. Liczby $a+b$, $b+c$ i $c+a$ są niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba $a+b+c$ jest niewymierna?

175. Liczby $a+b$, $b+c$, $c+d$ i $d+a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a, b, c, d są wymierne?

176. Liczby $a+b$, $b+c$, $c+d$ i $d+e$, $e+a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a, b, c, d, e są wymierne?

177. Niech n będzie liczbą naturalną. Mając do dyspozycji nawiasy, n, liczby całkowite oraz znaki $+,-,\cdot,:$ i $\sqrt{}$ zapisać liczbę niewymierną dodatnią mniejszą od $\frac{1}{n}$.

178. Suma wyrazów rosnącego postępu arytmetycznego 2007-wyrazowego o wyrazach dodatnich jest liczbą wymierną. Czy stąd wynika, że co najmniej jeden wyraz postępu jest liczbą wymierną?

179. To samo pytanie dla postępu 2008-wyrazowego.

180. Wszystkie poniższe przykłady można podać bez używania operacji bardziej skomplikowanych niż logarytmy i pierwiastki, korzystając tylko z faktu niewymierności liczb o postaci rozważanej we wcześniejszych zadaniach.

Podać przykład takiej liczby rzeczywistej x, że

a) $0<x<1$ oraz liczba x jest niewymierna,
b) $\sqrt{5}<x<\sqrt{6}$ oraz liczba x jest wymierna,
c) liczby x^2 i x^3 są niewymierne, ale liczba x^5 jest wymierna,
d) liczby x^4 i x^6 są wymierne, ale liczba x^5 jest niewymierna,
e) liczba $(x+1)^2$ jest niewymierna,
f) liczba x jest niewymierna, ale liczba $x+\dfrac{1}{x}$ jest wymierna,
g) liczba x jest niewymierna i liczba 2^x jest niewymierna,
h) 2^x+3^x jest liczbą niewymierną,
i) 2^x+3^x jest liczbą wymierną,
j) $\log_2 x+\log_3 x$ jest liczbą niewymierną,
k) $\log_2 x+\log_3 x$ jest liczbą wymierną,
l) $\log_2 x\cdot\log_3 x$ jest liczbą niewymierną,
m) $\log_2 x\cdot\log_3 x$ jest liczbą wymierną,
n) $2^x+\log_2 x$ jest liczbą całkowitą dodatnią,

o) $2^x + \log_2 x$ jest liczbą niewymierną,
p) $x + \log_2 x$ jest liczbą wymierną niecałkowitą,
q) $x^{\sqrt{2}}$ jest liczbą wymierną niecałkowitą,
r) $x^{\sqrt{2}}$ jest liczbą niewymierną,
s) $\log_x(1+x)$ jest liczbą wymierną,
t) $\log_x(1+x)$ jest liczbą niewymierną.

181. TEST: Prawda czy fałsz? - 20 pytań.

Czy natępujące zdania są prawdziwe czy fałszywe?

a) Suma dwóch liczb niewymiernych jest zawsze niewymierna.
b) Iloczyn dwóch liczb niewymiernych jest zawsze niewymierny.
c) Między liczbami $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$ nie ma żadnej liczby niewymiernej.
d) Między dowolnymi dwoma różnymi liczbami niewymiernymi znajduje się co najmniej jedna liczba wymierna.
e) Między dowolnymi dwoma różnymi liczbami niewymiernymi znajduje się nieskończenie wiele liczb wymiernych.
f) Suma liczby wymiernej i niewymiernej jest zawsze niewymierna.
g) Iloczyn liczby wymiernej i niewymiernej jest zawsze niewymierny.
h) Między liczbami 0,4(9) i 0,5 znajduje się co najmniej jedna liczba niewymierna.
i) Każda liczba rzeczywista może być zapisana w postaci ułamka dziesiętnego w dokładnie jeden sposób. (Ułamek dziesiętny może być skończony lub nie. Ułamek dziesiętny skończony utożsamiamy z odpowiednim ułamkiem dziesiętnym nieskończonym mającym na końcu nieskończenie wiele zer.)
j) Jeżeli $x<y<z$, x jest liczbą wymierną i z jest liczbą niewymierną, to y musi być liczbą niewymierną.
k) Kwadrat dowolnej liczby niewymiernej jest liczbą wymierną.
l) Jeśli x jest liczbą niewymierną dodatnią, to liczba $\sqrt{x}$ też musi być niewymierna.
m) Jeśli $\sqrt{x}+1$ jest liczbą wymierną, to liczba x też musi być wymierna.
n) Jeżeli pewne 2 wyrazy postępu arytmetycznego 1000-wyrazowego są wymierne, to wszystkie pozostałe wyrazy tego postępu też muszą być wymierne.
o) Jeżeli pewne 2 wyrazy postępu arytmetycznego 1000-wyrazowego są niewymierne, to wszystkie pozostałe wyrazy tego postępu też muszą być niewymierne.
p) Jeżeli pewne 2 wyrazy postępu geometycznego 1000-wyrazowego są wymierne, to wszystkie pozostałe wyrazy tego postępu też muszą być wymierne.
q) Jeżeli pewne 2 wyrazy postępu geometycznego 1000-wyrazowego są niewymierne, to wszystkie pozostałe wyrazy tego postępu też muszą być niewymierne.
r) Jeżeli suma postępu arytmetycznego 4-wyrazowego jest niewymierna, to wszystkie jego wyrazy są niewymierne.
s) Jeżeli suma postępu arytmetycznego 4-wyrazowego jest wymierna, to wszystkie jego wyrazy są wymierne.
t) Jeżeli x jest liczbą niewymierną dodatnią, to $\log_2 x$ też musi być liczbą niewymierną.

Zajęcia z Matematyki Elementarnej B
są współfinansowane przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.