

1. Elementy szkolnej teorii liczb (c.d.).

42. Niech

$$m = 2222001600030006$$

$$n = 3333002400045009$$

Wyznaczyć $\text{NWD}(m,n)$ oraz $\text{NWW}(m,n)$.

43. W miejsce kropek wstawić największą lub najmniejszą (wybrać to, co jest bardziej sensowne) liczbę, przy której podana implikacja jest prawdziwa dla dowolnej liczby naturalnej n

a) $24|n^2 \Rightarrow \dots\dots|n^2$

b) $18|n^3 \Rightarrow \dots\dots|n^3$

c) $60|n^5 \Rightarrow \dots\dots|n^5$

d) $n^2|24 \Rightarrow n^2|\dots\dots$

e) $n^3|10! \Rightarrow n^3|\dots\dots$

f) $54|n^2 \Rightarrow \dots\dots|n^3$

g) $n^5|12^8 \Rightarrow n|\dots\dots$

h) $8^8|n^{10} \Rightarrow \dots\dots|n$

44. Jakie wartości przyjmuje

$$\text{NWD}(16n - 1, n + 1),$$

gdy n przebiega liczby naturalne?

2. Procenty.

45. Kilogram ziemniaków kosztuje 50 groszy. Jaka będzie cena ziemniaków, jeżeli ich cena wzrośnie

a) o 2000%

b) o 1000%

c) o 400%

d) o 200%

e) o 100%

f) o 20%

46. Za 17 złotych i 37 groszy można kupić 30 kg ziemniaków. Ile ziemniaków można będzie kupić za 34 złote i 74 grosze, jeżeli ich cena

a) wzrośnie o 20%

b) zmaleje o 20%

c) wzrośnie o 50%

d) zmaleje o 50%

e) wzrośnie o 100%

f) zmaleje o 90%

47. W rosnącym postępie arytmetycznym o wyrazach dodatnich ósmy wyraz jest większy od piątego o 20%. Podać przykład takich m i n , że n -ty wyraz jest od m -tego

- a) większy o 100%
- b) mniejszy o 10%
- c) większy o 10%
- d) mniejszy o 1%
- e) większy o 1000%
- f) mniejszy o 99%

48. Czy istnieją takie liczby pierwsze p i q , że liczba q jest od liczby p

- a) większa o 100%
- b) większa o 50%
- c) większa o 40%
- d) większa o 20%
- e) większa o 5%
- f) mniejsza o 5%

49. W Dakistanie dostępne są następujące terminowe lokaty bankowe:

Bank	Roczna stopa procentowa	Termin lokaty
Duck Savings	200%	1 rok
Bank of Turkey	150%	6 miesięcy
Goose Investments	1000%	3 lata
Poultry National Bank	2000%	4 lata
Chicken Bank Ltd.	400%	2 lata

Odsetki są obliczane i dopisywane do lokaty na koniec okresu umownego (bez kapitalizacji odsetek w trakcie pojedynczego okresu lokaty), po czym lokata zostaje przedłużona automatycznie na kolejne okresy na identycznych warunkach.

Uszereguj banki, poczynając od najkorzystniejszego, z perspektywy młodego człowieka, który chce lokować oszczędności na bardzo długi okres (np. na emeryturę).

50. Minister wprowadził podatek od oprocentowania lokat bankowych. Podatek w wysokości 50% pobierany jest od odsetek w momencie dopisywania odsetek do lokaty przez bank. Czy i jak zmienia to uszeregowanie banków występujących w poprzednim zadaniu? Jak wpłynie ten podatek na wielkość kwoty oszczędności po 60 latach?

51. Okres połowicznego rozpadu izotopu cezu ^{137}Cs wynosi 30 lat. Z powodu awarii elektrowni atomowej doszło do skażenia okolicznych terenów cezem ^{137}Cs , a intensywność promieniowania przekracza 1000-krotnie dopuszczalne normy.

Czy prasa słusznie podaje, że tereny te mogą być zamieszkałe dopiero za 30 lat?

52. W *Gazecie Wyborczej* napisano kiedyś, że producenci masła i margaryn ukrywają przed konsumentami dane dotyczące zawartości tłuszczu w ich produktach. Oto bowiem podają, że masło zawiera 75% tłuszczu, ale nie piszą, czy jest to zawartość w 100g masła,

czy w całej kostce (200g), a przecież konsument ma prawo wiedzieć. Skomentować tę informację.

3. Wzory skróconego mnożenia, dzielenie wielomianów.

53. Uprościć wyrażenia

- a) $\frac{1}{5-2\sqrt{6}} + 2\sqrt{6}$
- b) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^6}$
- c) $(2^{2^{2007}} - 1) \cdot (2^{2^{2007}} + 1)$
- d) $(3^{669} - 1) \cdot (9^{669} + 3^{669} + 1)$
- e) $\frac{2^{2007} + 1}{2^{669} + 1}$

54. Uzupełnić wzory skróconego mnożenia. Kropki występujące po lewej stronie równości zastąpić pojedynczym znakiem.

- a) $(x+2)^2 = x^2 + \dots$
- b) $a^3 + b^3 = (a+b) \cdot \dots$
- c) $a^3 - b^3 = (a-b) \cdot \dots$
- d) $a^3 \dots b^3 = (a^2 + ab + b^2) \cdot \dots$
- e) $a^4 \dots b^4 = (a+b) \cdot \dots$
- f) $a^4 \dots b^4 = (a-b) \cdot \dots$
- g) $a^5 \dots b^5 = (a+b) \cdot \dots$
- h) $a^5 \dots b^5 = (a-b) \cdot \dots$
- i) $(a+b)^3 = a^3 + 3 \dots$
- j) $(a-b)^4 = a^4 - \dots$
- k) $(a-b)^5 = a^5 - \dots$
- l) $a^n - b^n = (a-b) \cdot \dots$

55. Dobrać takie liczby a i b , aby wielomian $x^4 + a$ był podzielny przez wielomian $x^2 + 2x + b$.

56. Podać wszystkie liczby naturalne n takie, że

- a) wielomian $x^{60} - 1$ jest podzielny przez wielomian $x^n - 1$,
- b) wielomian $x^{60} - 1$ jest podzielny przez wielomian $x^n + 1$,
- c) wielomian $x^{60} + 1$ jest podzielny przez wielomian $x^n - 1$,
- d) wielomian $x^{60} + 1$ jest podzielny przez wielomian $x^n + 1$.

57. Dobrać znak " \pm " tak, aby wielomian $x^4 \pm x^2 + 1$ był podzielny przez wielomian $x^2 \pm x + 1$.

58. Wyznaczyć wszystkie takie liczby naturalne n , że liczba $n^4 + 4$ jest pierwsza.