Zadania powtórzeniowo-uzupełniające.

70. Ile zer końcowych ma liczba 100! ?

71. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n}{n} > \frac{4^n}{2n+1} .$$

72. Dowieść, że wśród dowolnych 6 osób istnieją trzy osoby, z których każde dwie się znają lub trzy osoby, z których żadne dwie się nie znają.

73. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne d, dla których prawdziwe jest następujące zdanie:
Dla dowolnej liczby naturalnej n liczba n^2 jest podzielna przez 6 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba n^2 jest podzielna przez d.

74. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne d, dla których prawdziwe jest następujące zdanie:
Dla dowolnej liczby naturalnej n liczba n^3 jest podzielna przez 80 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba n^3 jest podzielna przez d.

75. Wyznaczyć wszystkie takie liczby naturalne n, że liczba $14^n - 9$ jest pierwsza.

Kolokwium nr 1 (piątek 14 listopada 2008 r.) obejmuje materiał zadań 1-75.

5. Kwantyfikatory, implikacja, alternatywa, koniunkcja.

76. Wyznaczyć zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x, dla których prawdziwa jest podana implikacja

a) $x > 0 \Rightarrow x+1 > 0$
b) $x > 0 \Rightarrow x-1 > 0$
c) $x = 3 \Rightarrow x > 0$
d) $x = -3 \Rightarrow x > 0$
e) $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$
f) $x^2 = -4 \Rightarrow x = -2$

W poniższych zadaniach x, y przebiegają liczby rzeczywiste, natomiast m, n przebiegają liczby naturalne (całkowite dodatnie).

77. Połączyć podane warunki w grupy warunków równoważnych

a) $\underset{m}{\exists} n = 2m$
b) $\underset{m}{\exists} m = 2n$
c) $\underset{m}{\exists} m = 3n$
d) $\underset{m}{\exists} n = 9m$
e) $\underset{m}{\exists} n^2 = 9m$
f) $\underset{m}{\exists} n^3 = 9m$
g) $\underset{m}{\exists} n^2 = 27m$
h) $\underset{m}{\exists} n^3 = 27m$
i) $\underset{m}{\exists} n = 2m-1$
j) $\underset{m}{\exists} n = 2m+1$
k) $\underset{m}{\forall} n \neq 2m$
l) liczba n jest nieparzysta
m) liczba n jest podzielna przez 3
n) liczba n jest podzielna przez 9
o) liczba n jest parzysta
p) liczba n jest nieparzysta i różna od 1

W kolejnych siedmiu zadaniach każdemu warunkowi oznaczonemu literą przypisać równoważny warunek oznaczony cyfrą.

78. **a)** $x>0 \Rightarrow -x>0$ **b)** $x>0 \Rightarrow |x|>0$ **c)** $-x>0 \Rightarrow x>0$ **d)** $|x|>0 \Rightarrow x>0$
1) $x \geqslant 0$ **2)** $x \leqslant 0$ **3)** PRAWDA **4)** FAŁSZ

79. **a)** $\underset{x}{\forall} (x>0 \Rightarrow -x>0)$ **b)** $\underset{x}{\forall} (x>0 \Rightarrow |x|>0)$
c) $\underset{x}{\forall} (-x>0 \Rightarrow x>0)$ **d)** $\underset{x}{\forall} (|x|>0 \Rightarrow x>0)$
1) $x \geqslant 0$ **2)** $x \leqslant 0$ **3)** PRAWDA **4)** FAŁSZ

80. **a)** $\underset{x}{\exists} (x>0 \Rightarrow -x>0)$ **b)** $\underset{x}{\exists} (x>0 \Rightarrow |x|>0)$
c) $\underset{x}{\exists} (-x>0 \Rightarrow x>0)$ **d)** $\underset{x}{\exists} (|x|>0 \Rightarrow x>0)$
1) $x \geqslant 0$ **2)** $x \leqslant 0$ **3)** PRAWDA **4)** FAŁSZ

81. **a)** $\underset{y}{\forall}\ x>y^2$ **b)** $\underset{y}{\exists}\ x>y^2$ **c)** $\underset{y}{\forall}\ x<y^2$ **d)** $\underset{y}{\exists}\ x<y^2$
1) $x<0$ **2)** $x>0$ **3)** PRAWDA **4)** FAŁSZ

82. **a)** $\forall_y\ x=y$ **b)** $\exists_y\ x=y$ **c)** $\forall_y\ x\neq y$ **d)** $\exists_y\ x\neq y$
1) $x=0$ **2)** $x>0$ **3)** PRAWDA **4)** FAŁSZ

83. **a)** $\forall_y\ x^2=-y^2$ **b)** $\exists_y\ x^2=-y^2$ **c)** $\forall_y\ x^2\neq -y^2$ **d)** $\exists_y\ x^2\neq -y^2$
1) $x=0$ **2)** $x\neq 0$ **3)** PRAWDA **4)** FAŁSZ

84. **a)** $\forall_y\ xy=y$ **b)** $\exists_y\ xy=y$ **c)** $\forall_y\ xy=x$ **d)** $\exists_y\ xy=x$
1) $x=0$ **2)** $x=1$ **3)** PRAWDA **4)** FAŁSZ

85. Czy jest prawdą, że
a) $\forall_x\ (x=3\Rightarrow x=5)$
b) $\exists_x\ (x=5\Rightarrow x=3)$
c) $\forall_x\ (x^2>-4\Rightarrow x^2>-1)$
d) $\exists_x\ (x^2>-1\Rightarrow x^2=25)$
e) $\exists_x\ (x^2>-1\Rightarrow x<-1)$
f) $\exists_x\ (x^2<-1\Rightarrow x>-1)$
g) $\forall_x\ (x^2<-1\Rightarrow x<-1)$
h) $\forall_x\ (x^2>-1\Rightarrow x>-1)$

86. Dla których liczb naturalnych k spełniony jest podany warunek?
a) $\exists_m\exists_n(m>1\land n>1\land k=mn)$
b) $\exists_m\exists_n(m>1\land n>1\land k=m+n)$
c) $\exists_m\exists_n(m>1\land n>1\land k=m-n)$
d) $\exists_m\exists_n(m>1\land n>1\land k=6m-2n)$
e) $\exists_m\exists_n\left(m>1\land n>1\land k+2mn=m^2+n^2\right)$
f) $\forall_m\forall_n(k=mn\Rightarrow m+n=6)$
g) $\exists_m\exists_n(k=mn\Rightarrow m+n=6)$
h) $\forall_m\forall_n(k=mn\land m+n=6)$
i) $\exists_m\exists_n(k=mn\land m+n=6)$
j) $\forall_m\forall_n(k=mn\lor m+n=6)$
k) $\exists_m\exists_n(k=mn\lor m+n=6)$
l) $\exists_m\exists_n\left(k=mn\land m=n^2\right)$
m) $\exists_m\exists_n(k=mn\land m=nk)$
n) $\exists_m\exists_n(km=n\land m=nk)$