6. Indukcja matematyczna.

Studenci uczęszczający na Analizę B1: proszę zerknąć na listy zadań 1-3 z Analizy A1 i upewnić się, że nie macie problemów z rozwiązaniem zadań 1-30, K.1, K.2.

87. Zgadnąć, a następnie udowodnić wzór na sumę (skończoną, bo wyrazy poza trójkątem Pascala są zerami)

$$\binom{n}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}+\binom{n-3}{3}+\ldots$$

We wzorze mają prawo pojawić się wyrazy znanego ciągu liczbowego.

88. Zgadnąć, a następnie udowodnić wzór na sumę

$$1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+5\cdot 2^4+...+n\cdot 2^{n-1}\ .$$

7. Postęp arytmetyczny i geometryczny.

Uwaga: Przyjmujemy, że w postępie geometrycznym wszystkie wyrazy są różne od zera.

OSZUSTWO **89.** Uprościć wyrażenie

$$\frac{1+3+3^2+3^3+...+3^n}{3^n}.$$

Rozwiązanie:

W liczniku występuje suma postępu geometrycznego o pierwszym wyrazie $a_1=1$ i ilorazie $q=3$. Ze wzoru $S_n=a_1\frac{1-q^n}{1-q}$ na sumę postępu geometrycznego otrzymujemy $S_n=\frac{3^n-1}{2}$, skąd

$$\frac{1+3+3^2+3^3+...+3^n}{3^n}=\frac{3^n-1}{2\cdot 3^n}=\frac{1-\frac{1}{3^n}}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3^n}<\frac{1}{2}\ .$$

Zauważmy, że

$$\frac{1+3+3^2+3^3+...+3^n}{3^n}>\frac{3^n}{3^n}=1\ .$$

Zatem

$$1<\frac{1+3+3^2+3^3+...+3^n}{3^n}<\frac{1}{2}\ .$$

90. Obliczyć sumy postępów (ciągów) arytmetycznych i geometrycznych.

a) $1+2+3+\ldots+n$

b) $3+4+5+\ldots+n$

c) $1+2+4+\ldots+2^n$

d) $1+3+9+\ldots+3^{2007}$

e) $2^n+3\cdot 2^{n-1}+3^2\cdot 2^{n-2}+\ldots+3^n$

f) $\frac{1}{3}+1\frac{1}{2}+2\frac{2}{3}+...+103$

g) $4+6+9+...+\frac{3^{100}}{2^{98}}$

h) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^{100}}$

i) $7+9+11+13+...+(6n+1)$

j) $5+15+25+35+45+55+65+...+(100n+55)$.

k) $5+8+11+14+...+101$

l) $-17-13-9-...+99$

m) $27+81+243+...+3^{33}$

n) $1+\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}+4+...+2^n$

91. Drugi, piąty i dziesiąty wyraz pewnego postępu arytmetycznego tworzą postęp geometryczny trójwyrazowy. Jaki jest iloraz tego postępu geometrycznego?

92. Obliczyć

$$1+2+4+7+8+10+13+14+16+19+...+1000\,,$$

gdzie różnice między kolejnymi składnikami tworzą ciąg okresowy 1,2,3,1,2,3,1,2,3,...

93. Obliczyć

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{27}+\frac{1}{32}+...+\frac{1}{2187}\,,$$

gdzie w mianownikach znajdują się potęgi dwójki i trójki ustawione rosnąco.

94. Dla których liczb naturalnych $n\geqslant 3$ prawdziwe jest następujące twierdzenie?
W dowolnym postępie arytmetycznym n-wyrazowym o sumie 0, co najmniej jeden z wyrazów jest równy 0.

95. Ułożyć sensowną wersję poprzedniego zadania dla postępów geometrycznych.

96. Które liczby naturalne można przedstawić w postaci sumy co najmniej dwóch kolejnych liczb naturalnych?

97. Niech (a_n) będzie ciągiem

$$1,\ 8,\ 45,\ 220,\ 1001,\ 4368,\ \ldots$$

Rozstrzygnąć, czy ciąg $\left(\frac{a_n}{4^n}\right)$ jest rosnący.

Wskazówka 1: Znaleźć związek ciągu (a_n) z ciągiem (4^n-3^n).

Wskazówka 2: Odnaleźć ciąg (a_n) w trójkącie Pascala.