

## 9. Porównywanie i szacowanie liczb, nierówności między średnimi (harmoniczna, geometryczna, arytmetyczna, kwadratowa) i ich wykorzystanie w zagadnieniach optymalizacyjnych.

112. Wskazać taką liczbę naturalną  $n$ , że

$$n^{1000000} + 1 < 2^n.$$

113. Jak duża jest liczba  $1.001^{1000000}$ ? Porównać ją z liczbami 2, 5, 10, 100, 1000, 1000000,  $10^{10}$ ,  $10^{20}$ ,  $10^{50}$ ,  $10^{100}$ .

114. Omówić szkic dowodu nierówności między średnimi HGAK.

115. Korzystając ze wzoru Herona oraz z nierówności między średnimi arytmetyczną i geometryczną, dowieść, że trójkąt równoboczny ma największe pole spośród trójkątów o ustalonym obwodzie.

116. Dowieść, że dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej  $a$  oraz dowolnej liczby naturalnej  $n$  zachodzą nierówności

$$a^{n+1} + n \geq (n+1)a$$

oraz

$$na^{n+1} + 1 \geq (n+1)a^n.$$

117. Który z prostopadłościanów o ustalonej objętości ma naj..... sumę długości krawędzi?

118. Który z prostopadłościanów o ustalonej objętości ma naj..... powierzchnię całkowitą (sumę pól wszystkich sześciu ścian)?

119. Który z prostopadłościanów o ustalonej sumie długości krawędzi ma naj..... powierzchnię całkowitą?

120. Liczby rzeczywiste dodatnie  $a, b, c, d, e$  spełniają warunek

$$a + b + c + d + e = 1.$$

Udowodnić sensowne oszacowania wyrażeń

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}, \quad abcde, \quad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$$

i określić, kiedy zachodzą równości.

121. Liczby rzeczywiste dodatnie  $a, b, c, d, e$  spełniają warunek

$$abcde = 1.$$

Udowodnić sensowne oszacowania wyrażeń

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}, \quad a + b + c + d + e, \quad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$$

i określić, kiedy zachodzą równości.

**122.** Dwa nieprzystające prostokąty mają równe obwody. Wówczas większe pole ma ten z prostokątów, którego różnica długości boków jest .....

**123.** Liczby rzeczywiste dodatnie  $a, b, c$  spełniają warunek

$$a + b + c = 1.$$

Udowodnić sensowne oszacowanie wyrażenia

$$ab + bc + ca$$

i określić, kiedy zachodzi równość.

**124.** Liczby rzeczywiste dodatnie  $a, b, c, d$  spełniają warunek

$$a + b + c + d = 1.$$

Udowodnić sensowne oszacowanie wyrażenia

$$ab + bc + cd + da$$

i określić, kiedy zachodzi równość.

**125.** Samochód jechał przez godzinę z prędkością  $v_1$ , a przez następną godzinę z prędkością  $v_2$ . Wówczas średnia prędkość samochodu podczas dwugodzinnej podróży jest średnią ..... prędkości  $v_1$  i  $v_2$ .

**126.** Samochód jechał przez 100 kilometrów z prędkością  $v_1$ , a przez następne 100 kilometrów z prędkością  $v_2$ . Wówczas średnia prędkość samochodu podczas dwustukilometrowej podróży jest średnią ..... prędkości  $v_1$  i  $v_2$ .

**127.** W trójkącie prostokątnym wysokość opuszczona na przeciwprostokątną ma długość równą średniej ..... długości odcinków, na które spodek wysokości dzieli przeciwprostokątną.

**128.** W okrąg opisany na trójkącie prostokątnym wpisano kwadrat. Wówczas długość boku kwadratu jest średnią ..... długości przyprostokątnych trójkąta.

**129.** Korzystając z nierówności między średnimi arytmetyczną i geometryczną udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej  $x$  zachodzi nierówność

$$5x^3 \leq 3x^5 + 2.$$

**130.** Jaką największą wartość może osiągnąć iloczyn liczb naturalnych o sumie 2008?

**Uwaga:** Iloczyn może mieć dowolną liczbę czynników.

**131.** Dowieść, że dla dowolnych liczb naturalnych  $a, b, c, d$  zachodzi nierówność

$$\frac{3ab}{a^2 + 6b^2} < \frac{2c^2 + 3d^2}{8cd}.$$

**Zajęcia z Matematyki Elementarnej B**  
są współfinansowane przez Unię Europejską  
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.