

**Kolokwium nr 2 (piątek 19 grudnia 2008 r.) obejmuje materiał zadań 1-131.**

**134.** Czy dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich  $a, b, c, d, e$  spełniających warunek

$$a + b + c + d + e = 1$$

zachodzi nierówność

$$ab + bc + cd + de + ea \leq \frac{1}{5} ?$$

## 11. Elementy rachunku prawdopodobieństwa, zagadnienia optymalizacji prawdopodobieństwa i wartości oczekiwanej.

**135.** Zdarzenia losowe  $A, B$  są niezależne, a ponadto każde z nich ma prawdopodobieństwo różne od 0 i 1.

Niech  $C$  będzie zdarzeniem: Zachodzi dokładnie jedno ze zdarzeń  $A$  lub  $B$ .

Dowieść, że jeżeli zdarzenia  $A$  i  $C$  są niezależne oraz zdarzenia  $B$  i  $C$  są niezależne, to  $P(A) = P(B)$ .

**136.** Przemek i Gosia grają w następującą grę. Wykonują rzuty monetą. Gdy w dwóch kolejnych rzutach pojawią się orły, gra zostaje zakończona i wygrywa Przemek. Gdy bezpośrednio po rzucie, w którym wypadła reszka, wypadnie orzeł, gra kończy się zwycięstwem Gosi. Gdy po  $n$  rzutach nie nastąpiło rozstrzygnięcie, gra kończy się remisem.

Wyznaczyć prawdopodobieństwa zwycięstwa Przemka, zwycięstwa Gosi oraz remisu w zależności od  $n \geq 1$ . Obliczyć granice w/w prawdopodobieństw przy  $n$  dążącym do nieskończoności.

**137.** W tajnym ośrodku badawczym pracuje 40 naukowców: 20 mężczyzn i 20 kobiet. Kontrwywiad ustalił, że wśród nich jest troje szpiegów: dwóch mężczyzn i jedna kobieta. Nie ma jednak możliwości zidentyfikowania, którzy pracownicy ośrodka są szpiegami. Ośrodek ma rozpocząć nowy projekt badawczy, do którego przeprowadzenia trzeba utworzyć 20-osobowy zespół.

Ilu mężczyzn i ile kobiet należy powołać w skład zespołu, aby zmaksymalizować prawdopodobieństwo, że w zespole nie znajdzie się żaden szpieg?

**138.** Dysponujemy probabilistycznym testem pierwszości liczb dającym następujące rezultaty:

- test zastosowany do liczby pierwszej zawsze daje odpowiedź: **NIE WIADOMO**,
- test zastosowany do liczby złożonej daje odpowiedź: **NIE WIADOMO** z prawdopodobieństwem  $1/2$ , a odpowiedź: **LICZBA JEST ZŁOŻONA** z prawdopodobieństwem  $1/2$ ,
- wielokrotne stosowanie testu daje niezależne wyniki.

Wylosowano liczbę ze zbioru, w którym 99.9% to liczby złożone, a 0.1% to liczby pierwsze. Następnie poddano wylosowaną liczbę  $n$ -krotnemu testowi i otrzymano za każdym razem odpowiedź: **NIE WIADOMO**.

Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowana liczba jest liczbą pierwszą?

Ile razy należy wykonać test, aby w opisanej wyżej sytuacji móc stwierdzić, że wylosowana liczba jest pierwsza z prawdopodobieństwem:

- większym od  $1/2$  ?
- większym od  $999/1000$  ?

**139.** Sadownik zebrał ze swojego sadu owoce czereśni. Sadownik wie, że każdy owoc jest wadliwy z prawdopodobieństwem  $1/10$ . Lokalna przetwórnia jest gotowa kupić od sadownika wszystkie czereśnie po cenie  $n$  złotych za kilogram, dowolnie podyktowanej przez sadownika ( $n$  musi być liczbą naturalną) pod warunkiem, że nie są wadliwe. Sadownik chcąc sprzedać czereśnie zapewnia przetwórnę, że jego owoce nie są wadliwe, co przedstawiciel przetworni zweryfikuje przed sfinalizowaniem transakcji otwierając  $n$  losowo wybranych czereśni (im wyższa cena, tym staranniejsza weryfikacja). Jeżeli co najmniej jedna z wybranych czereśni okaże się wadliwa, przetwórnia odstąpi od zakupu i sadownik nie będzie mógł sprzedać swoich plonów.

Jaką cenę powinien ustalić sadownik, aby zmaksymalizować wartość oczekiwaną swojego zarobku?

**140.** W torebce znajdują się 4 rodzaje żujków: pomarańczowe, cytrynowe, truskawkowe i wiśniowe (każdy smak jest reprezentowany przez co najmniej jednego żujka).

Wiadomo, że

- jeżeli wyjmemy z torebki losowo dwa żujki, to prawdopodobieństwo, że obydwa są cytrynowe jest równe prawdopodobieństwu, że jeden jest cytrynowy, a jeden pomarańczowy;
- jeżeli wyjmemy z torebki losowo dwa żujki, to prawdopodobieństwo, że obydwa są truskawkowe jest równe prawdopodobieństwu, że jeden jest cytrynowy, a jeden truskawkowy.

Wyjmujemy losowo z torebki 3 żujki. Co jest bardziej prawdopodobne: wyciągnięcie dwóch żujków truskawkowych i jednego pomarańczowego, czy wyciągnięcie dwóch żujków cytrynowych i jednego truskawkowego?

## 12. Logarytmy.

**141.** Uprościć wyrażenia

- a)  $4^{2+\log_2 7}$
- b)  $\log_{\sqrt{3}} 2 \cdot \log_5 9$
- c)  $\log_6 2 + \log_{36} 9$
- d)  $3 \cdot \log_6 12 + 5 \cdot \log_6 18 + \log_6 24$

**142.** Czy podane liczby tworzą (w podanej kolejności) postęp arytmetyczny trójwyrazowy

- a)  $\log_7 1, \log_7 3, \log_7 5$
- b)  $\log_7 1, \log_7 4, \log_7 16$
- c)  $\log_7 4, \log_7 6, \log_7 9$
- d)  $\log_7 25, \log_7 10, \log_7 4$

**143.** Bez użycia kalkulatora rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

- a)  $\log_2 7$  czy  $\log_3 7$
- b)  $\log_{0,2} 7$  czy  $\log_{0,3} 7$
- c)  $\log_2 7$  czy  $\log_{0,3} 7$
- d)  $\log_{0,2} 7$  czy  $\log_3 7$
- e)  $\log_2 0,7$  czy  $\log_3 0,7$
- f)  $\log_{0,2} 0,7$  czy  $\log_{0,3} 0,7$
- g)  $\log_2 0,7$  czy  $\log_{0,3} 0,7$
- h)  $\log_{0,2} 0,7$  czy  $\log_3 0,7$
- i)  $\log_9 27$  czy  $\log_4 8$
- j)  $\log_3 8$  czy  $\log_2 5$
- k)  $\log_5 127$  czy  $\log_{10} 999$
- l)  $\log_3 100$  czy  $\log_2 10$
- m)  $(\log_2 3) \cdot \log_5 7$  czy  $(\log_2 7) \cdot \log_5 3$
- n)  $(\log_2 3) \cdot \log_7 5$  czy  $(\log_7 9) \cdot \log_{16} 25$
- o)  $\log_2 3$  czy  $\log_3 5$
- p)  $\log_3 7$  czy  $\log_5 19$
- q)  $\log_2 3$  czy  $\log_5 13$
- r)  $\log_3 5$  czy  $\log_{15} 56$
- s)  $(\log_3 15) + \log_5 15$  czy  $(\log_3 15) \cdot \log_5 15$
- t)  $(\log_7 123456789)^{\log_7 123456789}$  czy  $123456789^{\log_7 123456789}$
- u)  $\log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} 2$  czy  $(\log_{666} 665) + \log_{666} 667$
- v)  $\log_2 3$  czy  $1,6$
- w)  $2^{\log_3 7}$  czy  $7^{\log_3 2}$

**144.** Dla ilu trójek liczb rzeczywistych dodatnich  $a, b, c$  różnych od 1 spełniona jest podana równość? Dla wszystkich? Dla żadnej? Dla niektórych (podać 3 przykłady, a jeśli przykładów jest mniej niż 3, podać wszystkie)?

- a)  $\log_a(bc) = (\log_a b) + \log_a c$
- b)  $\log_a(bc) = (\log_a b) \cdot \log_a c$
- c)  $\log_a(b+c) = (\log_a b) \cdot \log_a c$
- d)  $\log_a(b+c) = (\log_a b) + \log_a c$
- e)  $(\log_a b) \cdot \log_b c = \log_a c$
- f)  $\log_a(b^c) = c \cdot \log_a b$
- g)  $\log_a(b^c) = (\log_a b)^c$

**145.** Dla podanych liczb  $a, b$  wskazać taką liczbę  $c$ , że liczby

$$\log_a 37, \log_b 37, \log_c 37$$

tworzą (w tej właśnie kolejności) postęp arytmetyczny trójwyrazowy.

- a)  $a = 64, b = 8$
- b)  $a = 4, b = 8$
- c)  $a = 2, b = 8$
- d)  $a = 64, b = 16$

**Zajęcia z Matematyki Elementarnej B**  
są współfinansowane przez Unię Europejską  
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.