Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 1 (1/2015)

Środa, 1 kwietnia 2015 r.

Łamigłówki i zadania na dziś

1. W roku 2015 pierwszy kwietnia wypada w środę. A w który dzień tygodnia wypadł pierwszy kwietnia w roku 1875, czyli przed 140 laty?

2. Zapisz cyframi (w układzie dziesiętnym) liczbę jedenaście trylionów dwanaście bilionów trzynaście miliardów czternaście milionów piętnaście tysięcy szesnaście.

3. Rozwiąż nierówność

$$2x<\sqrt{x^2+12}$$

w liczbach rzeczywistych x.

4. W trapezie o podstawach długości 14 i 39 wysokość ma długość 12, a jedno z ramion 15. Wyznacz długość drugiego ramienia tego trapezu.

5. Deltoid wypukły ma boki długości 25 i 39, a jego krótsza przekątna ma długość 30. Wyznacz długość dłuższej przekątnej tego deltoidu.

Problem dla ambitnych

6. Rozważmy ciąg liczbowy (a_n) o wyrazach całkowitych dodatnich utworzony następująco. Pierwsze dwa wyrazy są dane:

$$a_1=10, \qquad a_2=3519\,,$$

a każdy kolejny wyraz jest liczbą całkowitą, która z najlepszym przybliżeniem tworzy z poprzednimi dwoma ciąg geometryczny. Dokładniej, a_{n+2} jest równe ilorazowi $\dfrac{a_{n+1}^2}{a_n}$ zaokrąglonemu do najbliższej liczby całkowitej, czyli

$$a_{n+2}=\left[\frac{a_{n+1}^2}{a_n}+\frac{1}{2}\right],$$

gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x (zaokrąglenie x w dół do liczby całkowitej).

I tak iloraz $3519^2/10$ jest równy $1238336{,}1$, co po zaokrągleniu daje $a_3=1238336$. Podobnie $1238336^2/3519\approx 435770403{,}21$, co prowadzi do $a_4=435770403$.

Dla każdego wyrazu ciągu zainteresujemy się najwyższą potęgą dwójki, przez którą ten wyraz jest podzielny. Dokładniej, przez $D(n)$ oznaczymy największy wykładnik potęgi dwójki, przez którą jest podzielny wyraz a_n. Na przykład

$$a_3=1238336=2^6\cdot 19349\,,$$

co wobec nieparzystości drugiego czynnika ostatniego iloczynu daje $D(3)=6$. Z kolei a_4 jest liczbą nieparzystą, skąd $D(4)=0$.

Dziesięć początkowych wyrazów ciągu wraz z odpowiadającymi im wykładnikami dwójki przedstawia tabela obok.

Podaj $D(n)$ dla 20 wartości n powyżej 20 tysięcy, tzn. $20001\leqslant n\leqslant 20020$.

n	a_n	**D(n)**
1	10	**1**
2	3519	**0**
3	1238336	**6**
4	435770403	**0**
5	153347592358	**1**
6	53963013366916	**2**
7	18989582861136054	**1**
8	6682433665964136060	**2**
9	2351548216016968210480	**4**
10	827509749990874588980812	**2**

Łamigłówki liczbowe na ferie świąteczne

W każdej łamigłówce oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

7. Zapisz liczbę 11 używając cyfr 1 i 5 (każdej tylko raz).

8. Zapisz liczbę 32 używając cyfr 0, 2 i 8 (każdej tylko raz).

9. Zapisz liczbę 181 używając cyfr 2, 5 i 7 (każdej tylko raz).

10. Zapisz liczbę 7777 używając czterokrotnie cyfry 6.

Rozwiązania zadań 1–6

1. Ponieważ w kolejnych 28 latach jest 7 lat przestępnych, liczba dni w kolejnych 28 latach jest podzielna przez 7. To oznacza, że po 28 latach kalendarz uwzględniający dni tygodnia powtarza się. Ponieważ $140=5\cdot 28$, także po 140 latach poszczególne daty występują w te same dni tygodnia. Skoro więc w roku 2015 pierwszy kwietnia wypada w środę, to także 140 lat temu pierwszego kwietnia była środa.

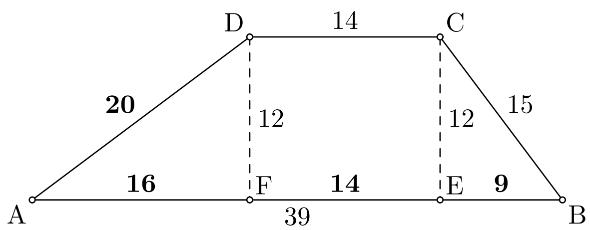
2. *Odpowiedź:* 11012013014015016.

3. Po podniesieniu danej w zadaniu nierówności stronami do kwadratu otrzymujemy kolejno:

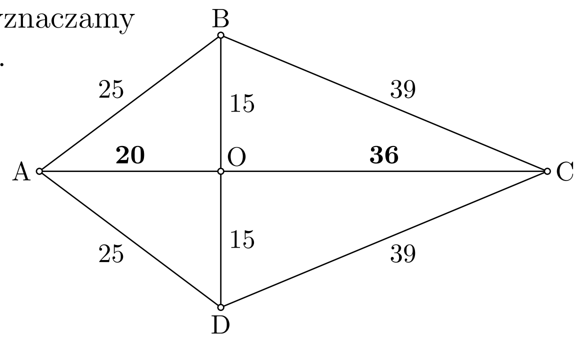
$$4x^2 < x^2+12\,, \qquad 3x^2<12\,, \qquad x^2<4\,,$$

co po spierwiastkowaniu stronami daje $x<2$. Zbiorem rozwiązań nierówności danej w treści zadania jest więc przedział $(-\infty, 2)$.

4. Przyjmując oznaczenia jak na rys. 1 wyznaczamy kolejno $EB=9$, $EF=14$, $AF=16$, $AD=\mathbf{20}$.



rys. 1



rys. 2

5. Przyjmując oznaczenia jak na rys. 2 wyznaczamy kolejno $AO=20$, $OC=36$, $AC=\mathbf{56}$.

Powyższe rozwiązania są błędne, jak przystało na primaaprilisowe wydanie *Trapezu.* Wyjaśnienie błędów oraz rozwiązania poprawne pojawią się w kolejnym *Trapezie.*

6. Połowiczna odpowiedź znajduje się w tabeli obok. Do wyznaczenia lub odgadnięcia pozostają wartości $D(n)$ dla $20011 \leqslant n \leqslant 20020$.

n	**D(n)**	n	**D(n)**
20001	**6668**	20006	**6668**
20002	**6666**	20007	**6671**
20003	**6667**	20008	**6668**
20004	**6668**	20009	**6669**
20005	**6667**	20010	**6670**

Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia (do zadania 6)

Podaj sumę dziesięciu liczb $D(n)$ dla $20011 \leqslant n \leqslant 20020$.