Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 2 (2/2015)

Piątek, 10 kwietnia 2015 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **11**, **12** i **15** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

11. Zapisz liczbę 19 używając cyfr 1, 2 i 3 (każdej tylko raz).

12. Zapisz liczbę 64 używając dwukrotnie cyfry 4.

13. Ile zer końcowych ma liczba $(5^{2015})!$?

14. Małe logo *Trapezu* pokazuje, jak z czterech trapezów równoramiennych o bokach 1, 1, 1 i 2 złożyć trapez równoramienny o bokach 2, 2, 2 i 4.
A dla których liczb całkowitych $n\geqslant 3$ można z n^2 takich trapezów złożyć trapez równoramienny o bokach n, n, n i $2n$?

Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

15. Pole powierzchni całkowitej dwunastościanu foremnego D jest większe od pola powierzchni całkowitej dwunastościanu foremnego E o 800%. Wówczas objętość dwunastościanu foremnego D jest większa od objętości dwunastościanu foremnego E o p%. Zapisz liczbę p używając czterokrotnie cyfry 4.

Rozwiązania zadań 1–10

1. Błąd w podanym rozwiązaniu polega na nieuwzględnieniu tego, że rok 1900 nie był rokiem przestępnym. W konsekwencji od pierwszego kwietnia 1875 do pierwszego kwietnia 2015 upłynął o jeden dzień mniej, niż to wynikało z naszych obliczeń. Zatem pierwszy kwietnia 1875 wypadł nie w środę, ale w czwartek.

2. W podanej słownie liczbie brak jest biliardów (czyli biliardów jest zero). Zatem poprawna odpowiedź to 11000012013014015016.

3. Uzyskana odpowiedź jest poprawna dzięki temu, że w rozwiązaniu popełnione są dwa błędy – drugi błąd zniwelował efekt pierwszego.

Błąd pierwszy polega na beztroskim podniesieniu nierówności stronami do kwadratu, czego robić nie wolno, gdy nie mamy pewności, że obie strony nierówności są nieujemne. Przedstawiony rachunek jest poprawny przy założeniu, że lewa strona nierówności

$$2x<\sqrt{x^2+12}$$

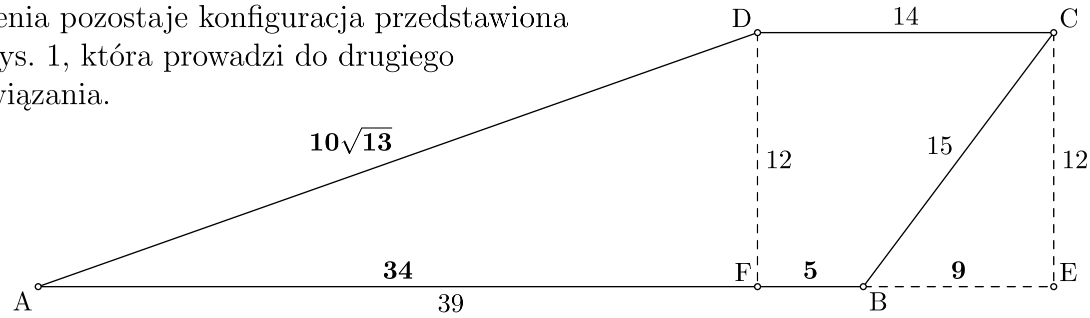
jest nieujemna, czyli $x\geqslant 0$. Przy tym założeniu wyeliminowany zostaje drugi błąd. Błędne było przejście od nierówności $x^2<4$ do $x<2$. Opierało się ono na założeniu, że $\sqrt{x^2}=x$, podczas gdy w rzeczywistości $\sqrt{x^2}=|x|$, czyli nierówność $x^2<4$ prowadzi do $|x|<2$. Jednak zgubienie modułu jest bez znaczenia w kontekście założenia $x\geqslant 0$.

Zatem w przypadku $x\geqslant 0$ dana w zadaniu nierówność sprowadza się do $x<2$, co daje przyczynek do zbioru rozwiązań w postaci przedziału $[0,\,2)$.

Pozostaje do rozważenia przypadek $x<0$, w którym dana w zadaniu nierówność jest oczywiście prawdziwa, gdyż wówczas lewa strona jest ujemna, a prawa dodatnia. Powstały z tego przypadku przyczynek do zbioru rozwiązań to $(-\infty,\,0)$.

Ostatecznie zbiór rozwiązań nierówności to $(-\infty,\,0)\cup[0,\,2)=(-\infty,\,2)$.

4. Błąd w zaprezentowanym poprzednio rozwiązaniu polegał na rozważeniu tylko jednej z dwóch możliwych konfiguracji. Wiele osób kojarzy trapez z konfiguracją, w której kąty przy dłuższej podstawie są ostre, a przy krótszej rozwarte. Nie należy jednak zapominać, że przy każdej podstawie może być po jednym kącie ostrym i jednym rozwartym (nie wspominając o tym, że trapez może mieć też kąty proste). W konsekwencji do rozważenia pozostaje konfiguracja przedstawiona na rys. 1, która prowadzi do drugiego rozwiązania.



rys. 1

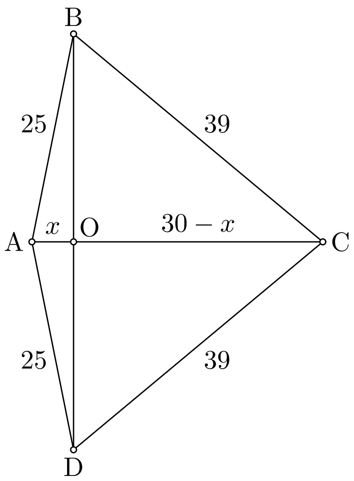
Odpowiedź poprawna: Drugie ramię trapezu ma długość 20 lub $10\sqrt{13}$.

5. Podane poprzednio rozwiązanie oparte zostało na nieuprawnionym założeniu, że w deltoidzie dłuższa przekątna dzieli krótszą na połowy. Tymczasem może być też i tak, że to dłuższa przekątna jest dzielona na połowy przez krótszą (rys. 2). Po oznaczeniu $x = AO$ otrzymujemy równanie $25^2 - x^2 = 39^2 - (30-x)^2$, którego rozwiązanie prowadzi do $x = 1/15$. W konsekwencji

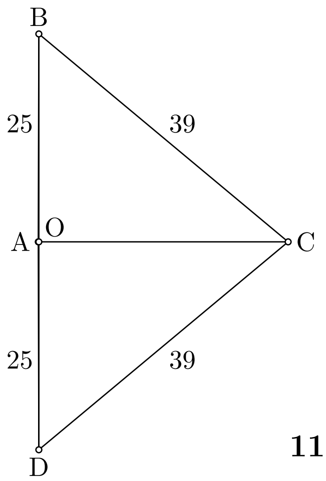
$$BD = 2 \cdot BO = 2 \cdot \sqrt{25^2 - \frac{1}{15^2}} = \frac{8\sqrt{8789}}{15}\,.$$

Należy zwrócić uwagę, że rys. 2 jest tylko rysunkiem poglądowym i nie oddaje rzeczywistych proporcji odcinków występujących w zadaniu. W rzeczywistości odległość punktów A i O jest tak mała, że punkty te są nierozróżnialne, a deltoid sprawia wrażenie trójkąta (rys. 3).

Odpowiedź poprawna: Dłuższa przekątna deltoidu ma długość 56 lub $\dfrac{8\sqrt{8789}}{15}$.



rys. 2



rys. 3

n	**D(n)**	n	**D(n)**
20011	**6669**	20016	**6672**
20012	**6670**	20017	**0**
20013	**6672**	20018	**6**
20014	**6670**	20019	**0**
20015	**6671**	20020	**2**

Dziwią Cię liczby w tej tabeli?
Chcesz zrozumieć, skąd się wzięły?
Przyjdź na mój wykład w sobotę
11 kwietnia 2015 r. o godz. 13:10
do sali HS w IM UWr
lub przeczytaj następny *Trapez*.

6. Wartości $D(n)$ dla $20011 \leqslant n \leqslant 20020$ przedstawione są w tabeli powyżej, a ich suma jest równa **40032.** Należy przy tym wyraźnie podkreślić: **W tabeli nie ma błędu !!!** Liczby $D(n)$ są rzędu $n/3$ dla $n \leqslant 20016$, a od $n = 20017$ są dość przypadkowymi małymi liczbami.

7. $11 = \sqrt{5! + 1}$ **8.** $32 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^{80}}}}}$ **9.** $181 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^{5!}}} - 7}}$ **10.** $7777 = \dfrac{6^6 + 6}{6}$