Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 3 (3/2015)

Piątek, 17 kwietnia 2015 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **16**, **17** i **20** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

16. Zapisz liczbę 15 używając cyfr 5 i 8 (każdej tylko raz).

17. Zapisz liczbę 103 używając cyfr 1, 3 i 7 (każdej tylko raz).

18. Zapewne wiesz, że $2^4=4^2$. A czy potrafisz podać inne przykłady takich różnych liczb wymiernych dodatnich a, b, że $a^b=b^a$?

19. Jak podzielić trapez równoramienny o bokach 1, 1, 1 i 2 na cztery trapezy przystające nierównoramienne?

Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

20. Zapisz jak najmniejszą liczbę całkowitą większą od 500 używając cyfr 2, 2 i 4. Przez *jak najmniejszą* rozumiemy *najmniejszą spośród liczb zapisanych przez uczestników konkursu.* Tym razem osoby biorące udział w konkursie mogą odpowiadać wielokrotnie.

Rozwiązania zadań 11–15

11. $19=\sqrt{\frac{(3!)!}{2}+1}$ **12.** $64=\sqrt{\sqrt{\sqrt{4^{4!}}}}$

13. Liczba 5 wchodzi do rozkładu na czynniki pierwsze liczby $n!$ z wykładnikiem

$$\left[\frac{n}{5}\right]+\left[\frac{n}{25}\right]+\left[\frac{n}{125}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{5^k}\right],$$

gdzie $k=[\log_5 n]$, a $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x.

Dla $n=5^{2015}$ powyższy wzór daje

$$5^{2014}+5^{2013}+5^{2012}+\ldots+5+1,$$

co na mocy wzoru na sumę postępu geometrycznego jest równe $\frac{5^{2015}-1}{4}$.

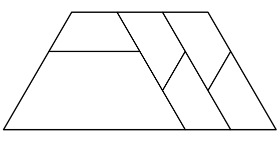
Pozostaje zauważyć, że w iloczynie tworzącym liczbę $(5^{2015})!$ występuje $\frac{5^{2015}-1}{2}$ czynników parzystych, zatem w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby $(5^{2015})!$ występuje więcej dwójek niż piątek.

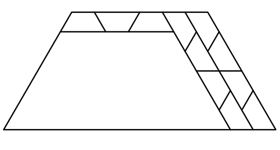
Odpowiedź: Liczba $(5^{2015})!$ jest zakończona $\frac{5^{2015}-1}{4}$ zerami.

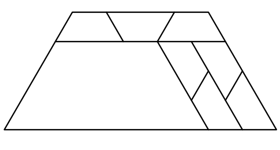
14. *Odpowiedź:* Jest to możliwe dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 3$.

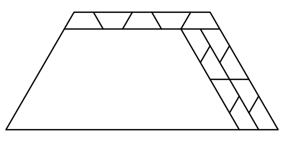
Aby się o tym przekonać, popatrzmy na rysunki pokazujące, jak z trapezu równoramiennego o bokach n, n, n i $2n$ oraz odpowiedniej liczby trapezów równoramiennych o bokach 1, 1, 1 i 2 można złożyć trapez równoramienny o bokach $n+1$, $n+1$, $n+1$ i $2n+2$.

Na rys. 1 i rys. 2 przedstawione są odpowiednio przypadki $n=2$ i $n=5$. Podobnie wygląda sytuacja dla dowolnej liczby n dającej przy dzieleniu przez 3 resztę 2.


rys. 1

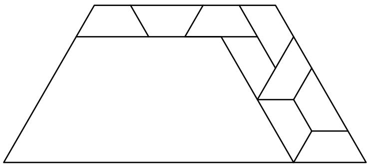

rys. 2


rys. 3

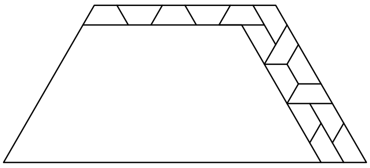

rys. 4

Dla liczb n podzielnych przez 3 obudowanie trapezu jest przedstawione na rys. 3 i rys. 4 na przykładzie $n=3$ i $n=6$.

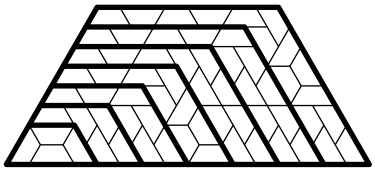
Natomiast dla liczb n dających przy dzieleniu przez 3 resztę 1 wystarczy spojrzeć na rys. 5 i rys. 6, gdzie widzimy odpowiednie konfiguracje w przypadkach $n=4$ i $n=7$.



rys. 5



rys. 6



rys. 7

Na rys. 7 przedstawiony jest podział trapezu o bokach 8, 8, 8 i 16 wykorzystujący powyższe spostrzeżenia.

15. Ponieważ wszystkie dwunastościany foremne są podobne, dwunastościan D jest podobny do dwunastościanu E. Jeżeli s jest skalą podobieństwa przekształcającego E na D, to pole powierzchni dwunastościanu D jest s^2-krotnie większe od pola dwunastościanu E. Z treści zadania wynika, że pole to jest większe o 800%, czyli 9-krotnie, skąd $s=3$. Zatem objętość D dwunastościanu jest większa $s^3=27$ razy od objętości dwunastościanu E. Większa 27 razy to znaczy większa o 2600%.

Odpowiedź: Objętość dwunastościanu foremnego D jest większa od objętości dwunastościanu foremnego E o 2600%, a przy tym $2600=4\cdot\dfrac{\left(4!+\sqrt{4}\right)!}{(4!)!}$

O zadaniu 6, czyli wyjaśnienie tajemnicy ciągu 10, 3519, ...

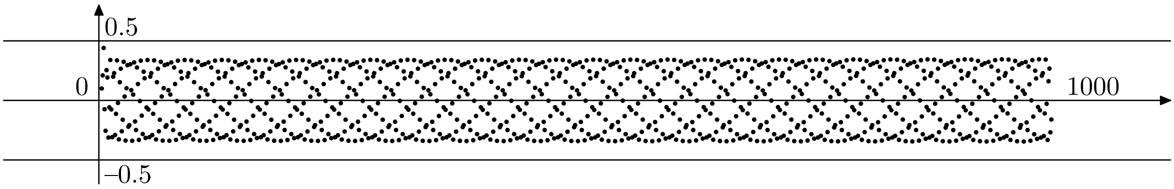
Przypomnijmy, że ciąg (a_n) jest określony wzorami

$$a_1=10,\qquad a_2=3519,\qquad a_{n+2}=\left[\frac{a_{n+1}^2}{a_n}+\frac{1}{2}\right].$$

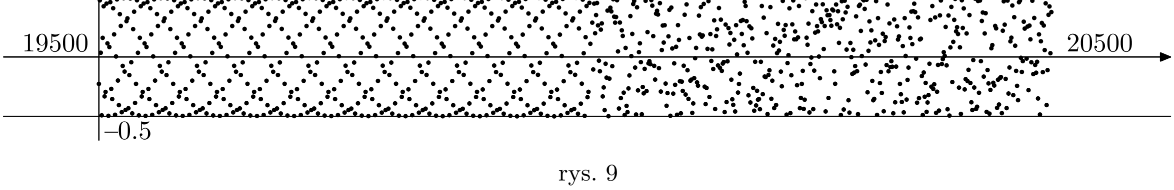
Wykładnik dwójki w rozkładzie a_n na czynniki pierwsze jest rzędu $n/3$ dla $n\leqslant 20016$, a dla $n\geqslant 20017$ jest dość przypadkową małą liczbą.

Dlaczego wyrazy ciągu (a_n) do pewnego miejsca są podzielne przez wysokie potęgi dwójki, z wykładnikami idącymi w tysiące, po czym nagle ta własność się urywa?

Ale to nie jedyna regularność ciągu (a_n), która przestaje obowiązywać wkrótce po przekroczeniu dwudziestotysięcznego wyrazu. To, że z ciągiem dzieje się coś dziwnego, można zobaczyć na rysunku. Oznaczmy przez $r_n=\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}}-a_n$ błąd zaokrąglenia, jaki popełniamy obliczając n-ty wyraz ciągu. Na wykresie (rys. 8) widać, że błędy te tworzą dość regularny obraz, który jednak się załamuje (rys. 9).

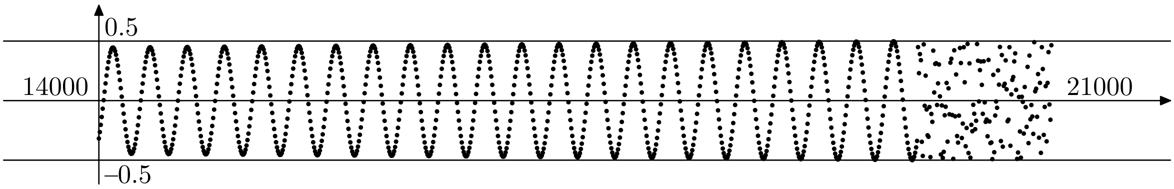


rys. 8

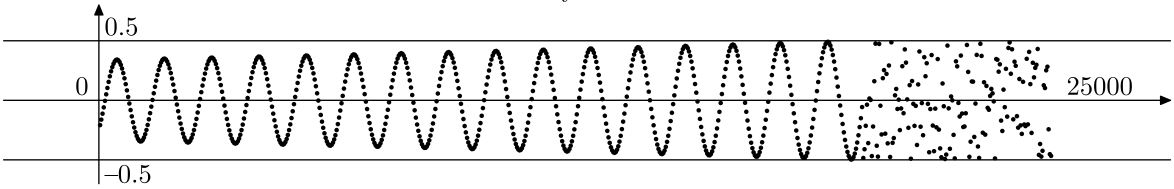


rys. 9

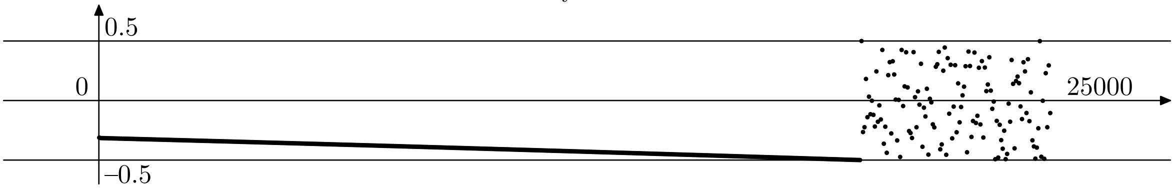
Ten efekt jest jeszcze lepiej widoczny, gdy spojrzymy na wykres przedstawiający r_n dla n podzielnych przez 7 (rys. 10), podzielnych przez 32 (rys. 11) lub dających przy dzieleniu przez 39 resztę 10 (rys. 12).



rys. 10



rys. 11



rys. 12

Aby zrozumieć dziwne zachowanie ciągu (a_n), przyjrzyjmy się ciągowi (b_n) określonemu wzorami

$$b_1=10, \qquad b_2=3519, \qquad b_3=1238336, \qquad b_4=435770403,$$
$$b_{n+4}=352\cdot b_{n+3}-36\cdot b_{n+2}+282\cdot b_{n+1}-176\cdot b_n \quad \text{dla} \quad n=1,2,3,\ldots \tag{1}$$

Z rekurencją liniową (1) związany jest wielomian charakterystyczny

$$x^4-352\cdot x^3+36\cdot x^2-282\cdot x+176 \tag{2}$$

mający pierwiastki

$$x_1\approx 351,8999714122, \qquad x_{2,3}\approx -0,2000470335\pm 0,9798061636\cdot i, \qquad x_4\approx 0,5001226548\,.$$

Kluczową własnością powyższych pierwiastków jest to, że para pierwiastków zespolonych sprzężonych ma moduł nieznacznie większy od 1, a mianowicie

$$|x_{2,3}|\approx 1,0000194667\,.$$

Z ogólnej teorii rekurencji liniowych wynika, że ciąg (b_n) jako ciąg spełniający rekurencję (1) jest dany wzorem

$$b_n=c_1\cdot x_1^n+c_2\cdot x_2^n+c_3\cdot x_3^n+c_4\cdot x_4^n$$

dla odpowiednio dobranych c_1, c_2, c_3, c_4. W naszym przypadku

$$c_1\approx 0,028417168598, \qquad c_{2,3}\approx -5,4944488846\cdot 10^{-7}\mp 1,25186301194\cdot 10^{-6}\cdot i,$$
$$c_4\approx -6,97879915130\cdot 10^{-6}\,.$$

Ponieważ $a_1=b_1$ oraz $a_2=b_2$, ciągi (a_n) i (b_n) pokrywają się, o ile

$$b_{n+2}=\left[\frac{b_{n+1}^2}{b_n}+\frac{1}{2}\right]$$

lub równoważnie

$$-\frac{1}{2}\leqslant \frac{b_{n+1}^2}{b_n}-b_{n+2}<\frac{1}{2}\,.$$

Oznaczmy

$$e_{n+2} = \frac{b_{n+1}^2}{b_n} - b_{n+2}$$

i zastanówmy się, czy liczby e_n są bezwzględnie mniejsze od 1/2. Jest to kluczowe pytanie, dopóki bowiem $|e_n| < 1/2$, ciągi (a_n) i (b_n) pokrywają się. Jednak pierwsze wystąpienie nierówności $|e_n| > 1/2$ oznacza, że $a_n \neq b_n$.

Okazuje się, że za rozmiar liczb e_n odpowiadają pierwiastki $x_{2,3}$ wielomianu (2), mamy bowiem przybliżony wzór (przybliżenie poprawia się ze wzrostem n i dość szybko staje wystarczająco dokładne dla naszych celów):

$$e_n \approx d_2 \cdot x_2^n + d_3 \cdot x_3^n \,,$$

gdzie

$$d_{2,3} \approx -0,12414353143 \mp 0,11538310417 \cdot i \,.$$

Przy tym

$$|d_{2,3}| \approx 0,16948415007 \,.$$

Stąd otrzymujemy oszacowanie

$$|e_n| \leqslant |d_2 \cdot x_2^n| + |d_3 \cdot x_3^n| = 2 \cdot |d_{2,3}| \cdot |x_{2,3}|^n \approx 2 \cdot 0,16948415007 \cdot 1,0000194667^n =$$
$$= 0,33896830014 \cdot 1,0000194667^n = E(n) \,.$$

Widać wyraźnie, że jeżeli n nie jest zbyt duże, oszacowanie $E(n)$ jest mniejsze od 1/2, ale dla odpowiednio dużych n osiągnie wartość większą. Można sprawdzić, że $E(n) < 1/2$ dla $n \leqslant 19967$ oraz $E(n) > 1/2$ dla $n \geqslant 19968$.

Ponieważ jednak na ogół moduł liczby e_n jest istotnie mniejszy od $E(n)$, nierówność $E(n) > 1/2$ nie oznacza natychmiastowej katastrofy. Przy $e_{19978} \approx -0,499965588$ można już poczuć dreszyk emocji. Tykająca bomba wybucha dopiero przy

$$e_{20017} \approx -0,500353242 \,,$$

kiedy to ciągi (a_n) i (b_n) się rozchodzą po 20016 wyrazach zgodności. Bezpośrednie obliczenia pokazują, że

$$a_{20016} = b_{20016} = 380995271430010615716769105\ldots004587993474478899200 \quad \text{(50968 cyfr)}$$
$$a_{20017} = 134072225124419274474077226\ldots461422976123271118847 \quad \text{(50971 cyfr)}$$
$$b_{20017} = 134072225124419274474077226\ldots461422976123271118848 \quad \text{(50971 cyfr)}$$

Podsumowując: Dla $n \leqslant 20016$ zachodzi równość $a_n = b_n$, a począwszy od $n = 20017$ każdy z ciągów idzie swoją drogą. Rekurencja (1) ma parzyste współczynniki, co powoduje, że wyrazy ciągu (b_n) są podzielne przez coraz to wyższe potęgi dwójki. Dopóki ciągi (a_n) i (b_n) są zgodne, również ciąg (a_n) ma wyrazy podzielne przez wysokie potęgi dwójki.

Niestety, bez użycia komputera trudno byłoby dokładnie zbadać własności ciągu (a_n). Także wyznacznie wartości funkcji $D(n)$ określonej w treści zadania 6 wymaga wykonania bezpośrednich obliczeń, gdyż ciąg (a_n) po rozwodzie z ciągiem (b_n) zachowuje się bardzo kapryśnie, co było wyraźnie widać na obrazkach.