Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 4 (4/2015)
Piątek, 24 kwietnia 2015 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **21**, **22** i **25** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

21. Zapisz liczbę 60 używając cyfr 3 i 5 (każdej tylko raz).

22. Zapisz liczbę 71 używając cyfr 0 i 7 (każdej tylko raz).

23. Rozważmy ciąg (a_n) określony następująco:

$$a_0=a_1=1, \qquad a_{n+1}=\frac{a_0^{31}+a_1^{31}+a_2^{31}+a_3^{31}+\ldots+a_n^{31}}{n} \qquad \text{dla} \quad n=1,2,3,\ldots$$

Wtedy $a_2=2$, $a_3=2^{30}+1$, a niektóre dalsze wyrazy ciągu są przedstawione w tabeli obok, gdzie c_n jest liczbą cyfr liczby a_n, a d_n jest liczbą cyfr liczby c_n.

n	a_n	c_n	d_n
3	1073741825	10	2
4	30253...91425	280	3
5	20042...16225	8664	4
6	45886...31105	268562	6
7	54196...41025	8325411	7
25	61884...28225	581...842	34
26	13841...58721	180...095	36
100	46121...43201	414...950	146
1000	20565...00001	695...723	1488
1075	67639...40001	495...312	1600
1076	50673...96001	153...664	1602
1077	65540...76001	475...572	1603

Z przeprowadzonych obliczeń wiadomo, że liczby a_n są zakończone cyfrą 5 dla $3 \leqslant n \leqslant 25$ oraz cyfrą 1 dla $26 \leqslant n \leqslant 1077$.

Czy w oparciu o te informacje możemy stwierdzić, że cyfra jedności liczby a_{1078} także jest równa 1?

24. Dla których liczb całkowitych dodatnich n można z odpowiedniej liczby trapezów równoramiennych o bokach 1, 1, 1 i 2 złożyć trójkąt równoboczny o boku n?

Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

25. Liczba 12345678910111213141S...10121013101410151016 powstaje przez wypisanie kolejnych liczb całkowitych od 1 do 1016. Liczba ta daje przy dzieleniu przez 9000 resztę r. Zapisz liczbę r używając czterokrotnie cyfry 4.

Zadania wokół jednego tematu (jakiego?)

26. Uporządkuj następujące liczby w kolejności rosnącej:
$12345678901\cdot 12345678911$, $12345678903\cdot 12345678909$, $12345678905\cdot 12345678907$, $12345678902\cdot 12345678910$, $12345678900\cdot 12345678912$, $12345678904\cdot 12345678908$.

27. Wyznacz wszystkie (z dokładnością do przystawania) trójkąty prostokątne o bokach długości całkowitej i jednej z przyprostokątnych długości 15.

28. Która liczba jest większa:

$$\sqrt{77}-\sqrt{76} \quad \text{czy} \quad \sqrt{79}-\sqrt{78}\ ?$$

29. Rozłóż na iloczyn czynników pierwszych liczbę 3^8-1.

30. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$\left|\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1}\right| \leqslant |x-y|\ .$$

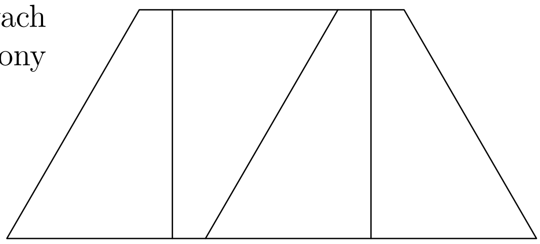
Rozwiązania zadań 16–20

16. $15 = \dfrac{5!}{8}$ **17.** $103 = \dfrac{(3!)!+1}{7}$

18. *Odpowiedź:* Przykładem liczb spełniających warunki zadania są $a=9/4$ i $b=27/8$. Ogólniej, dla liczby całkowitej dodatniej n możemy przyjąć

$$a = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \quad \text{oraz} \quad b = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}.$$

19. Podział na trapezy prostokątne o podstawach $5/8$ i $1/8$ oraz ramionach 1 i $\sqrt{3}/2$ jest przedstawiony na rysunku obok.



20. $512 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^{(4!)^2}}}}}}}$

Błędne rozwiązanie zadania 23

23. *Sposób I:*

Zgodnie z informacjami podanymi w zadaniu

$$a_2^{31} = 2^{31} \equiv 8 \pmod{10},$$
$$a_n^{31} \equiv 5 \pmod{10} \quad \text{dla} \quad 3 \leqslant n \leqslant 25$$

oraz

$$a_n^{31} \equiv 1 \pmod{10} \quad \text{dla} \quad 26 \leqslant n \leqslant 1077.$$

Zatem

$$a_0^{31} + a_1^{31} + a_2^{31} + a_3^{31} + \ldots + a_{1077}^{31} \equiv 1+1+8+23\cdot 5+1052\cdot 1 \equiv 7 \pmod{10}.$$

Z definicji ciągu (a_n) otrzymujemy

$$a_{1078} = \frac{a_0^{31} + a_1^{31} + a_2^{31} + a_3^{31} + \ldots + a_{1077}^{31}}{1077},$$

gdzie w ułamku po prawej stronie licznik i mianownik są zakończone cyfrą 7. Stąd wynika, że cyfra jedności liczby a_{1078} jest równa 1.

Sposób II:

Zauważmy, że z definicji ciągu (a_n) wynika równość

$$a_0^{31} + a_1^{31} + a_2^{31} + a_3^{31} + \ldots + a_{n-1}^{31} = (n-1)\cdot a_n,$$

skąd

$$a_{n+1} = \frac{(n-1)\cdot a_n + a_n^{31}}{n} = a_n \cdot \frac{n-1+a_n^{30}}{n}.$$

W szczególności

$$a_{1078} = \frac{a_{1077}\cdot(1076 + a_{1077}^{30})}{1077}. \tag{1}$$

Ponieważ wiemy, że liczba a_{1077} jest zakończona jedynką, także liczba a_{1077}^{30} jest zakończona cyfrą 1. Zatem w ułamku po prawej stronie wzoru (1) licznik i mianownik są zakończone siódemką. Wartość tego ułamka ma więc cyfrę jedności równą 1.