Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 5 (5/2015)
Czwartek, 30 kwietnia 2015 r.

Łamigłówki i zadania na długi weekend

W łamigłówkach **31**, **32**, **33** i **35** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

31. Zapisz liczbę 100 używając trzykrotnie cyfry 4.

32. Zapisz liczbę 1000 używając cyfr 4, 4 i 5. Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

33. Zapisz liczbę 1000000 używając cyfr 4, 4 i 6.

34. Rozstrzygnij, czy prawdziwa jest następująca cecha podzielności przez 27: *Jeżeli suma cyfr liczby trzycyfrowej jest podzielna przez 27, to liczba ta jest podzielna przez 27.* A czy analogiczna cecha podzielności jest prawdziwa dla liczb czterocyfrowych?

Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

35. Zapisz jak najmniejszą liczbę całkowitą większą od 2000 używając cyfr 2, 2 i 3. Przez *jak najmniejszą* rozumiemy *najmniejszą spośród liczb zapisanych przez uczestników konkursu.* Tym razem osoby biorące udział w konkursie mogą odpowiadać wielokrotnie.

Zadania wokół jednego tematu – wzory skróconego mnożenia (część 2)

36. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej nieparzystej n liczba n^4 daje przy dzieleniu przez 16 resztę 1.

37. Zapewne wiesz, że $3^2+4^2=5^2$. Możesz nie wiedzieć, że także $3^3+4^3+5^3=6^3$. Udowodnij, że dla czwartych potęg podobna równość nie zachodzi, albowiem dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n liczba $n^4+(n+1)^4+(n+2)^4+(n+3)^4$ nie jest czwartą potęgą liczby całkowitej.

38. Która liczba jest większa: $\sqrt[4]{77}-\sqrt[4]{76}$ czy $\sqrt[4]{79}-\sqrt[4]{78}$?

39. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$\left|\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[4]{y^4+1}\right| \leqslant |x-y| .$$

Rozwiązania zadań 21–30

21. $60=\sqrt{(3!)!\cdot 5}$

22. $71=\sqrt{7!+0!}$

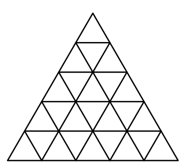
23. Z tego, że a_n okazuje się być liczbą całkowitą dla $n\leqslant 1077$, wcale nie wynika, że dalsze wyrazy ciągu (a_n) też są całkowite. No i tak się przykro składa, że liczba a_{1078} już całkowita nie jest. W rzeczywistości cyfra jedności tej liczby jest ósemką, gdyż

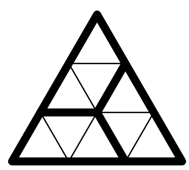
$$a_{1078}=1903553344\ldots6588727978,7158774373\ldots$$

24. *Odpowiedź:* Dla n podzielnych przez 3.

Za jednostkę pola przyjmijmy pole trójkąta równobocznego o boku 1. Wówczas pole trapezu jest równe 3, a pole trójkąta równobocznego o boku n jest równe n^2. Do złożenia trójkąta potrzeba więc $n^2/3$ trapezów, co jest liczbą całkowitą tylko wtedy, gdy n jest podzielne przez 3.

Z kolei przy n podzielnym przez 3 trójkąt równoboczny o boku n można podzielić na trójkąty równoboczne o boku 3 (na rys. 1 widzimy taki podział dla trójkąta o boku 15), a każdy z tych trójkątów na 3 trapezy (rys. 2).


rys. 1


rys. 2

25. Dana w zadaniu liczba daje przy dzieleniu przez 1000 resztę 16, gdyż ma trzycyfrową końcówkę 016.

Ponadto liczba ta jest podzielna przez 9, gdyż suma $1+2+3+4+\ldots+1016=\frac{1016\cdot1017}{2}$ jest podzielna przez 9 – zastanów się, dlaczego możemy tak wnioskować.

Reszta z dzielenia danej liczby przez 9000 ma więc końcówkę 016 i jest podzielna przez 9. Zatem jest to 2016.

Odpowiedź: Podana liczba daje przy dzieleniu przez 9000 resztę $2016=\dfrac{(4+4)!}{4!-4}$.

26. Podane liczby są iloczynami postaci $(12345678906-k)\cdot(12345678906+k)$, gdzie $k=1,2,3,4,5,6$. Ze wzoru na różnicę kwadratów otrzymujemy

$$(12345678906-k)\cdot(12345678906+k)=12345678906^2-k^2\,,$$

skąd wynika, że iloczyn jest tym większy, im mniejsza jest liczba k, czyli im większy jest pierwszy czynnik.

27. Oznaczając długości przyprostokątnych trójkąta przez $a=15$ i b, a długość przeciwprostokątnej przez c, otrzymujemy na mocy twierdzenia Pitagorasa $15^2+b^2=c^2$, czyli

$$225=c^2-b^2=(c-b)\cdot(c+b)\,.$$

Liczba 225 ma następujące cztery rozkłady na iloczyn dwóch liczb całkowitych dodatnich, gdzie pierwszy czynnik jest mniejszy od drugiego: $1\cdot225$, $3\cdot75$, $5\cdot45$, $9\cdot25$. Rozkłady te prowadzą odpowiednio do rozwiązań

$$b=112,\ c=113,\qquad b=36,\ c=39,\qquad b=20,\ c=25,\qquad b=8,\ c=17\,.$$

28. Korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b},\qquad a+b\neq0,$$

przepisujemy podane liczby jako

$$\frac{1}{\sqrt{77}+\sqrt{76}}\quad\text{oraz}\quad\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{78}}\,.$$

Ponieważ pierwsza liczba ma mniejszy mianownik, jest ona większa.

29. Zastosowanie wzoru na różnicę kwadratów prowadzi do

$$3^8-1=\left(3^4-1\right)\cdot\left(3^4+1\right)=80\cdot82=\left(2^4\cdot5\right)\cdot(2\cdot41)=2^5\cdot5\cdot41\,.$$

30. Przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$\left|\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1}\right|=\left|\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1}\right|\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}=$$
$$=\frac{|x^2-y^2|}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}=|x-y|\cdot\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}\,.$$

Dowód danej w treści zadania nierówności będzie zakończony, jeśli wykażemy nierówność

$$\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}\leqslant1\,,$$

która jest równoważna nierówności

$$|x+y|\leqslant\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}\,.$$

Powyższą nierówność dowodzimy korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x|=\sqrt{x^2}$:

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|=\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}<\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}\,.$$