Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 6 (6/2015)
Piątek, 8 maja 2015 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **40** i **41** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

40. Zapisz liczbę 72 używając cyfr 7 i 9 (każdej tylko raz).

41. Zapisz liczbę 90 używając cyfr 8 i 9 (każdej tylko raz).

42. Mając liczbę x możemy obliczyć x^{15} wykonując sześć mnożeń. W tym celu obliczamy kolejno:

$$x^2=x\cdot x,\quad x^4=x^2\cdot x^2,\quad x^8=x^4\cdot x^4,\quad x^3=x^2\cdot x,\quad x^7=x^4\cdot x^3,\quad x^{15}=x^8\cdot x^7\,.$$

A czy można obliczyć x^{15} wykonując tylko pięć mnożeń?

Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

43. Liczbę całkowitą dodatnią nazwiemy *milutką,* jeżeli da się ją przedstawić w postaci sumy (dwóch lub więcej) trzydziestych drugich potęg liczb całkowitych dodatnich, w której to sumie występuje dokładnie jeden składnik nieparzysty i co najmniej jeden składnik parzysty. Podaj najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią, której trzydziesta druga potęga jest *milutka.*

Zadania wokół jednego tematu – wzory skróconego mnożenia (część 3)

44. Znajdź dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby 123^3-1.

45. Znajdź dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby 212^5+1.

46. Znajdź dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby $77^{34}-2^{34}$.

47. Znajdź dwa dwucyfrowe dzielniki pierwsze liczby $3^{15}-1$.

48. Która liczba jest większa:

$$\sqrt[3]{77}-\sqrt[3]{76}\quad\text{czy}\quad\sqrt[3]{79}-\sqrt[3]{78}\ ?$$

Rozwiązania zadań 31–39

31. $100=4!\cdot 4+4$ **32.** $1000=4^5-4!=\sqrt{\sqrt{\sqrt{\left(5\cdot\sqrt{4}\right)^{4!}}}}$ **33.** $1000000=\sqrt{\sqrt{(4+6)^{4!}}}$

34. Jedyną liczbą trzycyfrową o sumie cyfr podzielnej przez 27 jest 999 i ta liczba jest podzielna przez 27. Łatwo się o tym przekonać rozważając iloraz 999/9=111, który jako liczba o sumie cyfr równej 3 jest podzielny przez 3. Zatem podana cecha podzielności jest prawdziwa dla liczb trzycyfrowych, chociaż nie ma wielkiego zastosowania praktycznego, gdyż dotyczy tylko jednej liczby.

Liczb czterocyfrowych o sumie cyfr równej 27 jest już znacznie więcej. Przykładem takiej liczby niepodzielnej przez 27 jest $9918=9\cdot 1102$, gdzie liczba 1102 jest niepodzielna przez 3 jako liczba o sumie cyfr 4 (niepodzielnej przez 3). To dowodzi, że dla liczb czterocyfrowych sformułowana cecha podzielności nie jest ogólnie prawdziwa.

35. $2048=\sqrt{\sqrt{\dfrac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^{(3!)!}}}}}}{2}}}$

36. Korzystając dwukrotnie ze wzoru na różnicę kwadratów otrzymujemy

$$n^4-1=\left(n^2+1\right)\cdot(n+1)\cdot(n-1)\,.$$

Jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to w powyższym iloczynie wszystkie trzy czynniki są parzyste. Ponadto dwa ostatnie czynniki są kolejnymi liczbami parzystymi, a zatem jedna z nich jest podzielna przez 4. Podsumowując, iloczyn zawiera trzy czynniki parzyste, w tym jeden czynnik podzielny przez 4. Zatem iloczyn ten jest podzielny przez 16.

37. Spośród czterech kolejnych liczb n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ dwie są parzyste, a dwie nieparzyste. Czwarta potęga liczby parzystej jest podzielna przez 16, a czwarta potęga liczby nieparzystej daje przy dzieleniu przez 16 resztę 1. Zatem liczba

$$n^4+(n+1)^4+(n+2)^4+(n+3)^4$$

daje przy dzieleniu przez 16 resztę 2. Nie jest więc ona czwartą potęgą liczby całkowitej, gdyż czwarte potęgi mogą dawać przy dzieleniu przez 16 tylko reszty 0 i 1.

38. Dwukrotne zastosowanie wzoru na różnicę kwadratów prowadzi do równości

$$a-b=\frac{a^4-b^4}{(a^2+b^2)\cdot(a+b)} \tag{1}$$

przy założeniu $a+b\neq 0$. Możemy więc przepisać podane w zadaniu liczby w postaci

$$\frac{1}{\left(\sqrt{77}+\sqrt{76}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{77}+\sqrt[4]{76}\right)} \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{\left(\sqrt{79}+\sqrt{78}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{79}+\sqrt[4]{78}\right)}\,.$$

Ponieważ pierwsza liczba ma mniejszy mianownik, jest ona większa.

39. We wzorze (1) z poprzedniego zadania przyjmijmy $a=\sqrt[4]{x^4+1}$ oraz $b=\sqrt[4]{y^4+1}$. Zauważmy, że $a+b>0$ i przekształćmy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$\left|\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[4]{y^4+1}\right|=\left|\frac{(x^4+1)-(y^4+1)}{\left(\sqrt{x^4+1}+\sqrt{y^4+1}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt[4]{y^4+1}\right)}\right|=$$

$$=\frac{|x^4-y^4|}{\left(\sqrt{x^4+1}+\sqrt{y^4+1}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt[4]{y^4+1}\right)}=\frac{|x-y|\cdot|x+y|\cdot(x^2+y^2)}{\left(\sqrt{x^4+1}+\sqrt{y^4+1}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt[4]{y^4+1}\right)}.$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x|=\sqrt[4]{x^4}$ otrzymujemy:

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|=\sqrt[4]{x^4}+\sqrt[4]{y^4}<\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt[4]{y^4+1}\,,$$

skąd

$$\frac{|x+y|}{\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt[4]{y^4+1}}<1\,.$$

Podobnie, wykorzystując równość $x^2=\sqrt{x^4}$ otrzymujemy:

$$x^2+y^2=\sqrt{x^4}+\sqrt{y^4}<\sqrt{x^4+1}+\sqrt{y^4+1}\,,$$

skąd

$$\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^4+1}+\sqrt{y^4+1}}<1\,.$$

Połączenie tych nierówności pozwala dokończyć oszacowania:

$$\frac{|x-y|\cdot|x+y|\cdot(x^2+y^2)}{\left(\sqrt{x^4+1}+\sqrt{y^4+1}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt[4]{y^4+1}\right)}=$$

$$=|x-y|\cdot\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^4+1}+\sqrt{y^4+1}}\cdot\frac{|x+y|}{\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt[4]{y^4+1}}\leqslant|x-y|\cdot1\cdot1=|x-y|\,.$$