Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 7 (7/2015)
Piątek, 15 maja 2015 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **49**, **50** i **53** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

49. Zapisz liczbę 201 używając cyfr 3, 4 i 5 (każdej tylko raz).

50. Zapisz liczbę 201 używając cyfr 3, 4 i 8 (każdej tylko raz).

51. Podziel zbiór $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ na dwa czteroelementowe podzbiory mające równe sumy elementów oraz równe sumy kwadratów elementów.

52. Podziel zbiór $\{1,2,3,4,\ldots,16\}$ na dwa ośmioelementowe podzbiory mające równe sumy elementów, równe sumy kwadratów elementów oraz równe sumy sześcianów elementów.

Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

53. Zapisz jak najmniejszą liczbę całkowitą większą od 700 używając cyfr 1, 4, 4 i 7. Przez *jak najmniejszą* rozumiemy *najmniejszą spośród liczb zapisanych przez uczestników konkursu.* Tym razem osoby biorące udział w konkursie mogą odpowiadać wielokrotnie.

Zadania wokół jednego tematu – wzory skróconego mnożenia (część 4)

54. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$\left|\sqrt[6]{x^6+1}-\sqrt[6]{y^6+1}\right| \leqslant |x-y|\,.$$

55. Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{8n}<\sqrt{n^2+n}-n<\frac{1}{2}\,.$$

Rozwiązania zadań 40–48

40. $72=\frac{9!}{7!}$

41. $90=\frac{\left(\left(\sqrt{9}\right)!\right)!}{8}$

42. *Odpowiedź:* Można, na przykład tak:

$$x^2=x\cdot x,\quad x^4=x^2\cdot x^2,\quad x^5=x^4\cdot x,\quad x^{10}=x^5\cdot x^5,\quad x^{15}=x^{10}\cdot x^5\,.$$

43. Niech n będzie taką liczbą naturalną, że liczba n^{32} jest *milutka.* Wówczas dla pewnej nieparzystej liczby naturalnej $k<n$ liczba $n^{32}-k^{32}$ jest sumą trzydziestych drugich potęg liczb parzystych, a to jest równoważne podzielności liczby $n^{32}-k^{32}$ przez 2^{32}. Wynika stąd w szczególności, że liczba n jest nieparzysta.

Korzystając pięciokrotnie ze wzoru na różnicę kwadratów otrzymujemy

$$n^{32}-k^{32}=(n-k)\cdot(n+k)\cdot\left(n^2+k^2\right)\cdot\left(n^4+k^4\right)\cdot\left(n^8+k^8\right)\cdot\left(n^{16}+k^{16}\right)\,.$$

W iloczynie po prawej stronie jest 6 czynników parzystych, przy czym podzielny przez 4 jest dokładnie jeden czynnik. I w dodatku może to być tylko czynnik pierwszy lub drugi, bo suma dwóch kwadratów liczb nieparzystych nie jest podzielna przez 4. Stąd wynika, że liczba n spełnia warunki zadania wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba nieparzysta dodatnia $k<n$, że jedna z liczb $n-k$, $n+k$ jest podzielna przez 2^{27}. Zatem $2n>n+k\geqslant 2^{27}$ i najmniejszą liczbą spełniającą warunki zadania jest $n=2^{26}+1$, gdyż możemy przyjąć $k=2^{26}-1$.

Odpowiedź: Najmniejsza liczba, której 32-ga potęga jest *milutka,* to $2^{26}+1=67108865$.

44. Ze wzoru na różnicę sześcianów wynika, że dana liczba jest podzielna przez $123-1=122=2\cdot 61$, jej dzielnikiem pierwszym jest więc 61.

45. Ze wzoru na sumę piątych potęg otrzymujemy podzielność danej liczby przez $212+1=213=3\cdot 71$, a w konsekwencji przez 71.

46. Ze wzorów na różnicę potęg o jednakowych parzystych wykładnikach otrzymujemy podzielność danej liczby przez $77-2=75=3\cdot 5^2$ i $77+2=79$.

Odpowiedź: Dana liczba jest podzielna przez 79.

47. Ze wzoru na różnicę sześcianów wynika, że liczba $3^{15}-1=\left(3^5\right)^3-1^3$ jest podzielna przez $3^5-1=242=2\cdot 11^2$, a ze wzoru na różnicę piątych potęg otrzymujemy podzielność liczby $3^{15}-1=\left(3^3\right)^5-1^5$ przez $3^3-1=2\cdot 13$.

Odpowiedź: Dana liczba jest podzielna przez 11 i 13.

48. Korzystając ze wzoru na różnicę sześcianów w postaci

$$a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$$

przepisujemy podane liczby jako

$$\frac{1}{\sqrt[3]{77^2}+\sqrt[3]{77\cdot 76}+\sqrt[3]{76^2}} \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{79^2}+\sqrt[3]{79\cdot 78}+\sqrt[3]{78^2}}\,.$$

Ponieważ pierwsza liczba ma mniejszy mianownik, jest ona większa.

Wzory skróconego mnożenia
Różnice i sumy potęg o jednakowych wykładnikach

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)$$

$$a^3-b^3=(a-b)\cdot\left(a^2+ab+b^2\right)$$

$$a^4-b^4=(a-b)\cdot\left(a^3+a^2b+ab^2+b^3\right)$$

$$a^5-b^5=(a-b)\cdot\left(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4\right)$$

$$a^n-b^n=(a-b)\cdot\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$$

$$a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$$

$$a^3+b^3=(a+b)\cdot\left(a^2-ab+b^2\right)$$

$$a^4-b^4=(a+b)\cdot\left(a^3-a^2b+ab^2-b^3\right)$$

$$a^5+b^5=(a+b)\cdot\left(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4\right)$$

$$a^n+b^n=(a+b)\cdot\left(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\ldots-ab^{n-2}+b^{n-1}\right) \qquad \text{dla } n \text{ nieparzystych}$$

$$a^n-b^n=(a+b)\cdot\left(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\ldots+ab^{n-2}-b^{n-1}\right) \qquad \text{dla } n \text{ parzystych}$$