Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **56**, **57** i **59** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 8 (8/2015)
Piątek, 22 maja 2015 r.

56. Zapisz liczbę 55 używając cyfr 1, 5 i 9 (każdej tylko raz).

57. Zapisz liczbę 39 używając cyfr 3, 7 i 8 (każdej tylko raz).

58. Dla których liczb naturalnych $n \geqslant 3$ istnieją takie liczby niewymierne a_1, a_2, a_3, ..., a_n, $a_{n+1} = a_1$, że wszystkie sumy $a_k + a_{k+1}$, gdzie $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, są wymierne?

Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

59. Zapisz liczbę 256 używając jak najmniejszej liczby jedynek. Przez *jak najmniejszej* rozumiemy *najmniejszej spośród ilości jedynek użytych przez uczestników konkursu.* Tym razem osoby biorące udział w konkursie mogą odpowiadać wielokrotnie.

Zadania wokół jednego tematu – wzory skróconego mnożenia (część 5)

60. Wyznacz wszystkie takie liczby całkowite $n > 1$, że liczba $n^2 - 1$ jest pierwsza.

61. Iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych dodatnich powiększony o 1 może być liczbą pierwszą, na przykład $5 \cdot 6 + 1 = 31$. Podobnie, iloczyn trzech kolejnych liczb powiększony o 1 bywa czasem liczbą pierwszą, jak np. w przypadku $3 \cdot 4 \cdot 5 + 1 = 61$. A czy potrafisz podać przykład liczby pierwszej będącej iloczynem czterech kolejnych liczb powiększonym o 1?

62. Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{8n} < \sqrt[3]{n^3 + n^2} - n < \frac{1}{3}\,.$$

63. Wiadomo, że wśród poniższych dwudziestu liczb 30-cyfrowych dokładnie dziesięć jest pierwszych. Wskaż te liczby pierwsze.

111111111111111111111111110333	111111111111111111111111111071
111111111111111111111111111073	111111111111111111111111111103
124999999999999999999999999499	124999999999999999999999999919
124999999999999999999999999973	124999999999999999999999999981
249999999999999999999999999901	249999999999999999999999999919
249999999999999999999999999983	249999999999999999999999999991
333333333333333333333333333101	333333333333333333333333333133
333333333333333333333333333301	333333333333333333333333333317
999999999999999999999999999757	999999999999999999999999999919
999999999999999999999999999973	999999999999999999999999999991

Rozwiązania zadań 49–55

49. $201 = 5! + 3^4$

50. $201 = \sqrt{8! + 3^4}$

51. *Odpowiedź:* Warunki zadania spełnia podział na zbiory $\{1,4,6,7\}$ i $\{2,3,5,8\}$.
Sprawdzenie: $1+4+6+7 = 2+3+5+8 = 18$ oraz $1^2+4^2+6^2+7^2 = 2^2+3^2+5^2+8^2 = 102$.

52. *Odpowiedź:* Warunki zadania spełnia podział na zbiory $\{1,4,6,7,10,11,13,16\}$ i $\{2,3,5,8,9,12,14,15\}$.

Podczas gdy w poprzednim zadaniu można sobie wyobrazić znalezienie odpowiedzi metodą prób i błędów przy użyciu kartki i długopisu, tym razem nie wydaje się to być skuteczną metodą.

Okazuje się, że tego typu konfiguracje można tworzyć według następującego ogólnego schematu: Niech dla liczby naturalnej $n \geqslant 2$ dany będzie zbiór $Z_n = \{1,2,3,4,\ldots,2^n\}$. Wskażemy podział tego zbioru na dwa równoliczne podzbiory A_n i B_n mające równe sumy k-tych potęg elementów dla $k = 1,2,3,...,n-1$.

Każdą liczbę ze zbioru Z_n zapiszemy w postaci

$c_{n-1}\cdot 2^{n-1} + c_{n-2}\cdot 2^{n-2} + c_{n-3}\cdot 2^{n-3} + \ldots + c_2\cdot 4 + c_1\cdot 2 + c_0 + 1$, gdzie $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} \in \{0,1\}$.

Zbiór A_n składa się ze wszystkich liczb ze zbioru Z, dla których suma

$$c_{n-1} + c_{n-2} + c_{n-3} + \ldots + c_2 + c_1 + c_0$$

jest parzysta, a zbiór B_n z liczb, dla których ta suma jest nieparzysta.

Zbiory A_n i B_n można też zdefiniować rekurencyjnie wzorami

$$A_2 = \{1,4\}, \quad B_2 = \{2,3\}, \quad A_{n+1} = A_n \cup (B_n + 2^n), \quad B_{n+1} = B_n \cup (A_n + 2^n),$$

gdzie dla zbioru S i liczby x definiujemy $S + x = \{s + x : s \in S\}$.

53. $701 = \sqrt{\dfrac{(4\cdot 7)!}{(4!)!} + 1}$

54. Stosując wzory na różnicę kwadratów i sześcianów otrzymujemy nieco prostszy od standardowego wzór na różnicę szóstych potęg:

$$a^6 - b^6 = \left(a^3 + b^3\right)\cdot\left(a^3 - b^3\right) = \left(a^3 + b^3\right)\cdot(a-b)\cdot\left(a^2 + ab + b^2\right).$$

Stosując ten wzór przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności do postaci

$$\left|\frac{x^6 - y^6}{\left(\sqrt{x^6+1} + \sqrt{y^6+1}\right)\cdot\left(\sqrt[6]{(x^6+1)^2} + \sqrt[6]{(x^6+1)\cdot(y^6+1)} + \sqrt[6]{(y^6+1)^2}\right)}\right| =$$

$$= \frac{|x-y|\cdot|x^3+y^3|\cdot(x^2+xy+y^2)}{\left(\sqrt{x^6+1} + \sqrt{y^6+1}\right)\cdot\left(\sqrt[6]{(x^6+1)^2} + \sqrt[6]{(x^6+1)\cdot(y^6+1)} + \sqrt[6]{(y^6+1)^2}\right)}.$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x|^3 = \sqrt{x^6}$ otrzymujemy

$$\left|x^3 + y^3\right| \leqslant |x|^3 + |y|^3 = \sqrt{x^6} + \sqrt{y^6} < \sqrt{x^6+1} + \sqrt{y^6+1}.$$

Podobnie z równości $|x| = \sqrt[6]{x^6}$ otrzymujemy

$$x^2 + xy + y^2 \leqslant x^2 + |xy| + y^2 =$$

$$= \sqrt[6]{x^{12}} + \sqrt[6]{x^6y^6} + \sqrt[6]{y^{12}} < \sqrt[6]{(x^6+1)^2} + \sqrt[6]{(x^6+1)\cdot(y^6+1)} + \sqrt[6]{(y^6+1)^2}.$$

Połączenie tych nierówności pozwala dokończyć oszacowania.

55. Stosując wzór na różnicę kwadratów otrzymujemy

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) - \sqrt{n^2+n} = \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - (n^2+n)}{\left(n+\frac{1}{2}\right) + \sqrt{n^2+n}} = \frac{1/4}{n\cdot\left(1 + \frac{1}{2n} + \sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)},$$

skąd wobec nierówności

$$1 + \frac{1}{2n} + \sqrt{1 + \frac{1}{n}} > 2$$

dostajemy tezę zadania.