

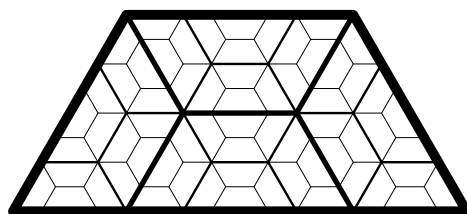
Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **64**, **65** i **67** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

64. Zapisz liczbę 77 używając cyfr 1, 2, 3 i 4 (każdej tylko raz).

65. Zapisz liczbę 104 używając trzykrotnie cyfry 4.

66. Czy istnieje taka liczba całkowita dodatnia n , że suma cyfr liczby n^n jest równa 2013?



Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 9 (9/2015)

Piątek, 29 maja 2015 r.

Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

67. Zapisz liczbę 522005 używając cyfr 1, 3, 4 i 6 (każdej tylko raz).

Zadania wokół jednego tematu – wzory skróconego mnożenia (część 6)

W kolejnych dwóch zadaniach n przebiega liczby całkowite dodatnie.

68. Udowodnij, jeżeli liczba $2^n - 1$ jest pierwsza, to liczba n jest pierwsza.

69. Udowodnij, jeżeli liczba $2^n + 1$ jest pierwsza, to liczba n jest potęgą dwójki.

70. Udowodnij, jeżeli n jest taką liczbą nieparzystą dodatnią, że liczba $\frac{2^n + 1}{3}$ jest pierwsza, to liczba n jest pierwsza.

71. Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{9n} < \sqrt[4]{n^4 + n^3} - n < \frac{1}{4}.$$

Rozwiązania zadań 56–63

56. $55 = \sqrt{\frac{9!}{5!}} + 1$

57. $39 = \sqrt{3^8 - 7!}$

58. *Odpowiedź:* Takie liczby niewymierne istnieją dla n parzystych.

Jeżeli n jest parzyste, to warunki zadania są spełnione przez liczby $a_k = (-1)^k \cdot \sqrt{2}$.

Natomiast dla n nieparzystego zachodzi równość

$$a_1 = \frac{(a_1 + a_2) - (a_2 + a_3) + (a_3 + a_4) - (a_4 + a_5) + \dots - (a_{n-1} + a_n) + (a_n + a_1)}{2},$$

która dowodzi, że a_1 jest liczbą wymierną, gdy wymienione w zadaniu sumy są wszystkie wymierne.

59. Przy użyciu 6 jedynek: $256 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{(1+1)^{(1+1)^{11}}}}}}}}$

60. Z rozkładu $n^2 - 1 = (n-1) \cdot (n+1)$ wynika, że liczba $n^2 - 1$ może być pierwsza tylko w przypadku, gdy $n-1 = 1$, czyli $n = 2$. Bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że wówczas otrzymujemy liczbę pierwszą 3.

61. Taki przykład nie istnieje, albowiem iloczyn czterech kolejnych liczb całkowitych powiększony o 1 jest zawsze kwadratem. Aby się o tym przekonać, wykonajmy następujące przekształcenia:

$$\begin{aligned} (n-1) \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2) &= (n-1)(n+2) \cdot n(n+1) = (n^2 + n - 2) \cdot (n^2 + n) = \\ &= \left((n^2 + n - 1) - 1 \right) \cdot \left((n^2 + n - 1) + 1 \right) = (n^2 + n - 1)^2 - 1. \end{aligned}$$

62. Stosując wzór na różnicę sześciątów dokonujemy następujących przekształceń:

$$\begin{aligned} \left(n + \frac{1}{3}\right) - \sqrt[3]{n^3 + n^2} &= \frac{\left(n + \frac{1}{3}\right)^3 - (n^3 + n^2)}{\left(n + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(n + \frac{1}{3}\right) \cdot \sqrt[3]{n^3 + n^2} + \sqrt[3]{(n^3 + n^2)^2}} = \\ &= \frac{\frac{n}{3} + \frac{1}{27}}{\left(n + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(n + \frac{1}{3}\right) \cdot \sqrt[3]{n^3 + n^2} + \sqrt[3]{(n^3 + n^2)^2}} < \\ &< \frac{\frac{n}{3} + \frac{n}{27}}{(n+0)^2 + (n+0) \cdot \sqrt[3]{n^3+0} + \sqrt[3]{(n^3+0)^2}} = \frac{10n}{27 \cdot 3n^2} = \frac{10}{81n} < \frac{10}{80n} = \frac{1}{8n}, \end{aligned}$$

co kończy rozwiązanie zadania.

Uwaga: Korzystając z nierówności

$$\sqrt[3]{n^3+n^2} > n + \frac{1}{9} \quad (1)$$

można przeprowadzić nieco subtelniejsze oszacowania

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{n}{3} + \frac{1}{27}}{\left(n + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(n + \frac{1}{3}\right) \cdot \sqrt[3]{n^3 + n^2} + \sqrt[3]{(n^3 + n^2)^2}} < \\ & < \frac{\frac{n}{3} + \frac{1}{27}}{\left(n + \frac{1}{9}\right)^2 + \left(n + \frac{1}{9}\right) \cdot \left(n + \frac{1}{9}\right) + \left(n + \frac{1}{9}\right)^2} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \left(n + \frac{1}{9}\right)}{3 \cdot \left(n + \frac{1}{9}\right)^2} = \frac{1}{9 \cdot \left(n + \frac{1}{9}\right)} < \frac{1}{9n}. \end{aligned}$$

Natomiast nierówność (1) dowodzimy następująco:

$$\sqrt[3]{n^3+n^2} = \sqrt[3]{n^3 + \frac{n^2}{3} + \frac{n^2}{3} + \frac{n^2}{3}} \geq \sqrt[3]{n^3 + \frac{n^2}{3} + \frac{n}{3} + \frac{1}{3}} > \sqrt[3]{n^3 + \frac{n^2}{3} + \frac{n}{27} + \frac{1}{729}} = n + \frac{1}{9}.$$

63. Wskazemy liczby złożone. Ich złożoność wynika z rozkładu różnicy potęg na iloczyn.

$$\begin{aligned}
1111111111111111111111111111071 &= \frac{10^{30}-361}{9} = \frac{(10^{15}-19) \cdot (10^{15}+19)}{9} \\
1111111111111111111111111111073 &= \frac{10^{30}-343}{9} = \frac{(10^{10}-7) \cdot (\dots)}{9} \\
124999999999999999999999999973 &= \frac{10^{30}}{8} - 27 = \left(\frac{10^{10}}{2} - 3 \right) \cdot (\dots) \\
249999999999999999999999999919 &= \frac{10^{30}}{4} - 81 = \left(\frac{10^{15}}{2} - 9 \right) \cdot \left(\frac{10^{15}}{2} + 9 \right) \\
249999999999999999999999999991 &= \frac{10^{30}}{4} - 9 = \left(\frac{10^{15}}{2} - 3 \right) \cdot \left(\frac{10^{15}}{2} + 3 \right) \\
333333333333333333333333333317 &= \frac{10^{30}-49}{3} = \frac{(10^{15}-7) \cdot (10^{15}+7)}{3} \\
999999999999999999999999999757 &= 10^{30} - 243 = (10^6 - 3) \cdot (\dots) \\
999999999999999999999999999919 &= 10^{30} - 81 = (10^{15} - 9) \cdot (10^{15} + 9) \\
999999999999999999999999999973 &= 10^{30} - 27 = (10^{10} - 3) \cdot (\dots) \\
999999999999999999999999999991 &= 10^{30} - 9 = (10^{15} - 3) \cdot (10^{15} + 3)
\end{aligned}$$

