Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 10 (10/2015)
Środa, 3 czerwca 2015 r.

Łamigłówki i zadania na długi weekend

W łamigłówkach **72**, **73**, **74** i **77** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

72. Zapisz liczbę 2024 używając cyfr 1, 2, 3 i 4 (każdej tylko raz).

73. Zapisz liczbę 2024 używając cyfr 1, 2, 4 i 5 (każdej tylko raz).

74. Zapisz liczbę 2024 używając czterokrotnie cyfry 4.

75. Liczbę całkowitą dodatnią n nazwiemy *ładną*, jeżeli istnieje liczba naturalna, której kwadrat ma w zapisie dziesiętnym sumę cyfr równą n. Udowodnij, że wśród liczb od 1 do 2015 jest mniej niż 1000 liczb *ładnych*.

76. Liczbę całkowitą dodatnią n nazwiemy *fajną*, jeżeli istnieje liczba naturalna, której sześcian ma w zapisie dziesiętnym sumę cyfr równą n. Udowodnij, że wśród liczb od 1 do 2015 jest mniej niż 700 liczb *fajnych*.

Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

77. Zapisz jak najmniejszą liczbę całkowitą większą od 39200 używając cyfr 1, 1, 2, 2, 4 i 4 (czyli dwukrotnie każdej z cyfr 1, 2 i 4). Przez *jak najmniejszą* rozumiemy *najmniejszą spośród liczb zapisanych przez uczestników konkursu.* Tym razem osoby biorące udział w konkursie mogą odpowiadać wielokrotnie.

Zadania wokół jednego tematu – wzory skróconego mnożenia (część 7)

78. Udowodnij, że wśród liczb 3^n+2^n, gdzie $n\in\{1,2,3,\ldots,2015\}$, jest mniej niż 20 liczb pierwszych.

79. Wyznacz wszystkie takie liczby całkowite dodatnie n, że liczba n^4+2500 jest pierwsza.

80. Udowodnij, że liczba 101010101 jest złożona.

81. Znajdź dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby $3^{78}-5^{52}$.

82. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich $x<y$ zachodzą nierówności

$$\frac{2\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}<\frac{\sqrt{y^3}-\sqrt{x^3}}{y-x}<\frac{\sqrt{x}+2\sqrt{y}}{2}\,.$$

Rozwiązania zadań 64–71

64. $77=3\cdot(4!+1)+2$

65. $104=4\cdot\left(4!+\sqrt{4}\right)$

66. *Odpowiedź:* Taka liczba n nie istnieje.

Aby to wykazać, dokonamy dwóch spostrzeżeń:

1° Liczba o sumie cyfr 2013 jest podzielna przez 3, ale nie jest podzielna przez 9.

2° Dowolna liczba postaci n^n, gdzie $n>1$, jeżeli jest podzielna przez 3, to jest podzielna przez 3^n, a więc także przez $3^2=9$.

67. $522005=\sqrt{\dfrac{(6!+4)!}{((3!)!)!}+1}$ Ogólnie: $\sqrt{\frac{(n+4)!}{n!}+1}=(n+1)(n+4)+1=(n+2)(n+3)-1.$

68. Jeżeli n jest liczbą złożoną, powiedzmy $n=qr$, gdzie q i r są większe od 1, to

$$2^n-1=2^{qr}-1=(2^q)^r-1^r=(2^q-1)\cdot(\ldots)\,.$$

69. Jeżeli n nie jest potęgą dwójki, to $n=qr$, gdzie q i r są liczbami naturalnymi, a r jest liczbą nieparzystą większą od 1. Wówczas

$$2^n+1=2^{qr}+1=(2^q)^r+1^r=(2^q+1)\cdot(\ldots)\,.$$

70. Jeżeli n jest nieparzystą liczbą złożoną, powiedzmy $n=qr$, gdzie q i r są nieparzyste i większe od 1, to

$$\frac{2^n+1}{3}=\frac{2^{qr}+1}{3}=\frac{(2^q)^r+1^r}{3}=\frac{(2^q+1)\cdot(\ldots)}{3}=\frac{(2^q+1)}{3}\cdot(\ldots)=$$
$$=\frac{(2+1)\cdot(2^{q-1}+2^{q-2}+\ldots+2+1)}{3}\cdot(\ldots)=\Big(2^{q-1}+2^{q-2}+\ldots+2+1\Big)\cdot(\ldots)\,.$$

71. Stosując dwukrotnie wzór na różnicę kwadratów otrzymujemy

$$\left(n+\frac{1}{4}\right)-\sqrt[4]{n^4+n^3}=\frac{\left(n+\frac{1}{4}\right)^4-(n^4+n^3)}{\left(\left(n+\frac{1}{4}\right)^2+\sqrt{n^4+n^3}\right)\cdot\left(\left(n+\frac{1}{4}\right)+\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)}=$$
$$=\frac{\frac{3n^2}{8}+\frac{n}{16}+\frac{1}{256}}{\left(\left(n+\frac{1}{4}\right)^2+\sqrt{n^4+n^3}\right)\cdot\left(\left(n+\frac{1}{4}\right)+\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)}<$$
$$<\frac{\frac{3n^2}{8}+\frac{n^2}{16}+\frac{n^2}{256}}{\left((n+0)^2+\sqrt{n^4+0}\right)\cdot\left((n+0)+\sqrt[4]{n^4+0}\right)}=\frac{113n^2}{256\cdot 4n^3}=\frac{113}{1024n}<\frac{113}{1017n}=\frac{1}{9n}\,,$$

co kończy dowód nierówności podanej w treści zadania.

Uwaga: Korzystając z nierówności

$$\sqrt[4]{n^3+n^2}>n+\frac{1}{8} \tag{1}$$

można przeprowadzić nieco subtelniejsze oszacowania

$$\frac{\frac{3n^2}{8}+\frac{n}{16}+\frac{1}{256}}{\left(\left(n+\frac{1}{4}\right)^2+\sqrt{n^4+n^3}\right)\cdot\left(\left(n+\frac{1}{4}\right)+\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)}=$$
$$=\frac{\frac{3}{8}\cdot\left(n^2+\frac{n}{6}+\frac{1}{96}\right)}{\left(\left(n+\frac{1}{4}\right)^2+\sqrt{n^4+n^3}\right)\cdot\left(\left(n+\frac{1}{4}\right)+\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)}<$$
$$<\frac{\frac{3}{8}\cdot\left(n^2+\frac{n}{4}+\frac{1}{64}\right)}{\left(\left(n+\frac{1}{8}\right)^2+\left(n+\frac{1}{8}\right)^2\right)\cdot\left(\left(n+\frac{1}{8}\right)+\left(n+\frac{1}{8}\right)\right)}=\frac{\frac{3}{8}\cdot\left(n+\frac{1}{8}\right)^2}{4\cdot\left(n+\frac{1}{8}\right)^3}=\frac{3}{32\cdot\left(n+\frac{1}{8}\right)}<\frac{3}{32n}\,.$$

Natomiast nierówność (1) dowodzimy następująco:

$$\sqrt[4]{n^4+n^3}=\sqrt[4]{n^4+\frac{n^3}{2}+\frac{n^3}{4}+\frac{n^3}{8}+\frac{n^3}{8}}\geqslant\sqrt[4]{n^4+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}+\frac{n}{8}+\frac{1}{8}}>$$
$$>\sqrt[4]{n^4+\frac{4n^3}{8}+\frac{6n^2}{64}+\frac{4n}{8^3}+\frac{1}{8^4}}=n+\frac{1}{8}\,.$$