Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 11 (11/2015)
Piątek, 12 czerwca 2015 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **83** i **84** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

83. Zapisz liczbę 2400 używając czterokrotnie cyfry 4.

84. Zapisz liczbę 2401 używając czterokrotnie cyfry 4.

85. Czy istnieją takie liczby całkowite dodatnie m, n, że $8^{2^m}=2^{8^n}$?

Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

86. Interesuje nas równanie

$$m^{n^w}=n^{m^w},$$

gdzie w jest ustaloną liczbą wymierną. Szukamy rozwiązań w liczbach naturalnych $m<n$ większych od 1.

Dla $w=1/2$ umiemy podać dwie pary (m,n) spełniające to równanie: (3, 27) i (4, 16).

Podaj liczbę wymierną dodatnią w wraz z jak największą liczbą rozwiązań interesującego nas równania. Przez *jak największą* rozumiemy *największą spośród ilości rozwiązań (m,n) dla jednego parametru w, podanych przez uczestników konkursu.* Tym razem osoby biorące udział w konkursie mogą odpowiadać wielokrotnie.

Zadania wokół jednego tematu – wzory skróconego mnożenia (część 8)

87. Udowodnij, że wśród liczb 3^n-2^n, gdzie $n\in\{1,2,3,\ldots,2015\}$, jest mniej niż 500 liczb pierwszych.

88. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich $x<y$ zachodzą nierówności

$$\frac{3\sqrt{x^3}+2\sqrt{y^3}}{2}<\frac{\sqrt{y^5}-\sqrt{x^5}}{y-x}<\frac{2\sqrt{x^3}+3\sqrt{y^3}}{2}\,.$$

89. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich $x<y$ oraz liczby naturalnej $n>1$ zachodzą nierówności

$$\frac{(y-x)\cdot\sqrt[n]{y}}{ny}<\sqrt[n]{y}-\sqrt[n]{x}<\frac{(y-x)\cdot\sqrt[n]{x}}{nx}\,.$$

Rozwiązania zadań 72–82

72. $2024=\dfrac{(4!)!}{21!\cdot 3!}$ **73.** $2024=45^2-1$ **74.** $2024=\sqrt{\sqrt{\sqrt{4^{44}}}}-4!$

75. Ponieważ kwadrat liczby całkowitej przy dzieleniu przez 3 nie może dawać reszty 2, ani też nie może być liczbą podzielną przez 3 niepodzielną przez 9, wnioskujemy, że kwadraty przy dzieleniu przez 9 nie dają żadnej z reszt 2, 3, 5, 6, 8. Ponieważ reszta z dzielenia liczby przez 9 jest taka sama jak reszta z dzielenia przez 9 sumy jej cyfr, żadna *ładna* liczba nie daje przy dzieleniu przez 9 jednej z wymienionych wyżej pięciu reszt. Zatem wśród dowolnych 9 kolejnych liczb naturalnych są nie więcej niż 4 *ładne* liczby. W konsekwencji wśród liczb od 1 do 2015 liczb *ładnych* jest co najwyżej

$$\frac{4}{9}\cdot 2016<\frac{4}{9}\cdot 2070=4\cdot 230=920<1000\,.$$

76. Ponieważ sześcian liczby całkowitej przy dzieleniu przez 9 może dawać tylko reszty 0, 1 i 8, wśród dowolnych 9 kolejnych liczb naturalnych są nie więcej niż 3 *fajne* liczby. Zatem wśród liczb od 1 do 2015 liczb *fajnych* jest co najwyżej

$$\frac{3}{9}\cdot 2016<\frac{1}{3}\cdot 2100=700\,.$$

77. $39202=\sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)^{4!}}+\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^{4!}}$

78. Jeżeli n nie jest potęgą dwójki o wykładniku całkowitym nieujemnym, to $n=qr$, gdzie q i r są liczbami naturalnymi, a przy tym r jest liczbą nieparzystą większą od 1. Wówczas

$$3^n+2^n=3^{qr}+2^{qr}=(3^q)^r+(2^q)^r=(3^q+2^q)\cdot(\ldots)$$

jest liczbą złożoną. Zatem liczba 3^n+2^n może być pierwsza tylko wtedy, gdy n jest potęgą dwójki, czyli jest jedną z 11 liczb 1, 2, 4, ..., 1024.

79. Korzystając z tożsamości

$$n^4+2500=n^4+100n^2+2500-100n^2=\left(n^2+50\right)^2-(10n)^2=$$
$$=\left(n^2+10n+50\right)\cdot\left(n^2-10n+50\right)=\left((n+5)^2+25\right)\cdot\left((n-5)^2+25\right),$$

gdzie w ostatnim iloczynie obydwa czynniki są większe od 1, wnioskujemy, że liczba n^4+2500 jest złożona dla każdej liczby naturalnej n.

80. Przyjmując dla przejrzystości zapisu $x=10$ zapisujemy daną w zadaniu liczbę w postaci

$$x^8+x^6+x^4+x^2+1=\frac{x^{10}-1}{x^2-1}=\frac{(x^5-1)\cdot(x^5+1)}{(x-1)\cdot(x+1)}=$$
$$=\frac{(x^5-1)}{(x-1)}\cdot\frac{(x^5+1)}{(x+1)}=\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)\cdot\left(x^4-x^3+x^2-x+1\right)=11111\cdot 9091\,.$$

81. Ze wzorów na różnicę potęg o jednakowych parzystych wykładnikach otrzymujemy podzielność liczby $3^{78}-5^{52}=27^{26}-25^{26}$ przez $27-25=2$ oraz przez $27+25=52=2^2\cdot 13$.

Odpowiedź: Dana liczba jest podzielna przez 13.

82. Przekształcamy środkową część dowodzonej nierówności korzystając ze wzorów skróconego mnożenia, a następnie wykorzystujemy nierówność $x<y$:

$$\frac{\sqrt{y^3}-\sqrt{x^3}}{y-x}=\frac{\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)\cdot\left(y+\sqrt{xy}+x\right)}{\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{y}+\sqrt{x}\right)}=$$
$$=\frac{y+\sqrt{xy}+x}{\sqrt{y}+\sqrt{x}}=\sqrt{y}+\frac{x}{\sqrt{y}+\sqrt{x}}<\sqrt{y}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{xy}+x}{\sqrt{y}+\sqrt{x}}=\sqrt{y}+\frac{\sqrt{x}}{2}\,.$$

To kończy dowód prawej nierówności. Podobnie dowodzimy lewą nierówność:

$$\frac{y+\sqrt{xy}+x}{\sqrt{y}+\sqrt{x}}=\sqrt{x}+\frac{y}{\sqrt{y}+\sqrt{x}}>\sqrt{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{y+\sqrt{xy}}{\sqrt{y}+\sqrt{x}}=\sqrt{x}+\frac{\sqrt{y}}{2}\,.$$