Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 12 (12/2015)
Piątek, 19 czerwca 2015 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **90**, **91** i **93** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

90. Zapisz liczbę 222 używając trzykrotnie cyfry 3.

91. Zapisz liczbę 16 używając cyfr 3, 5 i 9 (każdej tylko raz).

92. Ustaw liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 w takiej kolejności, aby każda liczba począwszy od drugiej była dzielnikiem sumy wszystkich liczb ją poprzedzających.

Facebookowy konkurs Trapezu – Zadanie Tygodnia

93. Zapisz liczbę 2187 używając cyfr 3, 3 i 5.

Zadania wokół jednego tematu – wzory skróconego mnożenia (część 9)

Dla podanych liczb a i b udowodnij nierówności

$$\frac{1}{2m} < a-b < \frac{1}{m}$$

dla odpowiednio dobranej liczby naturalnej m (być może innej w każdym z zadań).

94. $a=\sqrt{3}$, $b=\sqrt[3]{5}$.

95. $a=\sqrt[3]{2}$, $b=\sqrt[7]{5}$.

96. $a=\sqrt[3]{2}$, $b=\sqrt[10]{10}$.

97. $a=\sqrt[10]{10}$, $b=\sqrt[7]{5}$.

Rozwiązania zadań 83–89

83. $2400=4!\cdot(4!\cdot4+4)$

84. $2401=\left(\frac{4!+4}{4}\right)^4$

85. *Odpowiedź:* Takie liczby nie istnieją.
Aby się o tym przekonać, zapiszmy dane równanie w postaci

$$2^{3\cdot 2^m}=2^{8^n},$$

co jest równoważne równaniu

$$3\cdot 2^m=8^n.$$

Jednak to równanie nie ma rozwiązań, gdyż dla liczb całkowitych dodatnich m, n jego lewa strona jest podzielna przez 3, a prawa nie.

86. *Odpowiedź:* Istnieją liczby w z dowolnie dużą liczbą rozwiązań (m, n).

Aby się o tym przekonać, zauważmy, że dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich a, b dane w zadaniu równanie jest spełnione przez

$$w=\frac{1}{ab}, \qquad m=(a+1)^b, \qquad n=(a+1)^{(a+1)\cdot b}. \tag{1}$$

Przy tym $m^{a+1}=n$, skąd wynika, że różne liczby a prowadzą do różnych par (m, n).

Wystarczy więc przyjąć $w=1/k$, gdzie liczba całkowita dodatnia k ma odpowiednio dużo dzielników, a tym samym odpowiednio dużo przedstawień w postaci iloczynu ab.

Opisane wyżej rozwiązania nie są wszystkimi rozwiązaniami danego w zadaniu równania. Możemy bowiem zastosować wzory (1) także w sytuacji, gdy wprawdzie liczba b jest niecałkowitą liczbą wymierną, ale liczba m określona środkową równością (1) jest całkowita. W ten sposób na przykład dla $w=1/60$ można za (a, b) przyjąć następujące pary liczb: (120, 1/2), (80, 3/4), (24, 5/2), (8, 15/2).

87. Jeżeli n jest liczbą złożoną, powiedzmy $n=qr$, gdzie q i r są większe od 1, to liczba
$$3^n-2^n=3^{qr}-2^{qr}=(3^q)^r-(2^q)^r=(3^q-2^q)\cdot(\ldots)$$
jest złożona. Zatem liczba 3^n-2^n może być pierwsza tylko wtedy, gdy liczba n jest pierwsza lub równa 1. Jednak $3^1-2^1=1$ nie jest liczbą pierwszą.

Pozostaje wykazać, że liczb pierwszych mniejszych od 2016 jest mniej niż 500.

Ponieważ wśród dowolnych 210 kolejnych liczb całkowitych jest 48 liczb niepodzielnych przez 2, 3, 5, 7, istnieje 480 liczb mniejszych od 2100 niepodzielnych przez 2, 3, 5, 7. Liczbami pierwszymi mogą być tylko te liczby oraz liczby 2, 3, 5, 7. Zatem liczb pierwszych mniejszych od 2100 jest nie więcej niż 484.

88. Przekształcamy środkową część dowodzonej nierówności korzystając ze wzorów skróconego mnożenia:
$$\frac{\sqrt{y^5}-\sqrt{x^5}}{y-x}=\frac{\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)\cdot\left(y^2+\sqrt{xy^3}+xy+\sqrt{x^3y}+x^2\right)}{\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{y}+\sqrt{x}\right)}=$$
$$=\frac{y^2+\sqrt{xy^3}+xy+\sqrt{x^3y}+x^2}{\sqrt{y}+\sqrt{x}}=\frac{y^2+\sqrt{xy^3}}{\sqrt{y}+\sqrt{x}}+\frac{xy}{\sqrt{y}+\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x^3y}+x^2}{\sqrt{y}+\sqrt{x}}=$$
$$=\sqrt{y^3}+\sqrt{x^3}+\frac{xy}{\sqrt{y}+\sqrt{x}}<\sqrt{y^3}+\sqrt{x^3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{y^2+\sqrt{xy^3}}{\sqrt{y}+\sqrt{x}}=\sqrt{y^3}+\sqrt{x^3}+\frac{\sqrt{y^3}}{2}\,.$$
Ponadto
$$\sqrt{y^3}+\sqrt{x^3}+\frac{xy}{\sqrt{y}+\sqrt{x}}>\sqrt{y^3}+\sqrt{x^3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{x^3y}+x^2}{\sqrt{y}+\sqrt{x}}=\sqrt{y^3}+\sqrt{x^3}+\frac{\sqrt{x^3}}{2}\,.$$

89. *Sposób I:* Przekształcamy środkową część dowodzonej nierówności korzystając ze wzoru na różnicę n-tych potęg:
$$\sqrt[n]{y}-\sqrt[n]{x}=\frac{y-x}{\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}y}+\sqrt[n]{x^{n-3}y^2}+\ldots+\sqrt[n]{xy^{n-2}}+\sqrt[n]{y^{n-1}}}\,.$$
Korzystając z nierówności $x<y$ szacujemy ostatnie wyrażenie od góry przez
$$\frac{y-x}{\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-1}}+\ldots+\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-1}}}=\frac{y-x}{n\cdot\sqrt[n]{x^{n-1}}}=\frac{(y-x)\cdot\sqrt[n]{x}}{nx}$$
i od dołu przez
$$\frac{y-x}{\sqrt[n]{y^{n-1}}+\sqrt[n]{y^{n-1}}+\sqrt[n]{y^{n-1}}+\ldots+\sqrt[n]{y^{n-1}}+\sqrt[n]{y^{n-1}}}=\frac{y-x}{n\cdot\sqrt[n]{y^{n-1}}}=\frac{(y-x)\cdot\sqrt[n]{y}}{ny}\,.$$

Sposób II: Rozważmy funkcję $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ określoną wzorem $f(t)=\sqrt[n]{t}$. Wówczas jej pochodna jest dana wzorem
$$f'(t)=\frac{1}{n\cdot t^{(n-1)/n}}\,.$$
Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej rachunku różniczkowego wynika istnienie takiej liczby $c\in(x,y)$, że
$$f(y)-f(x)=(y-x)\cdot f'(c)=\frac{(y-x)}{n\cdot c^{(n-1)/n}}\,,$$
skąd wobec nierówności $x<c<y$ otrzymujemy
$$\frac{(y-x)\cdot\sqrt[n]{y}}{ny}=\frac{(y-x)}{n\cdot y^{(n-1)/n}}<f(y)-f(x)<\frac{(y-x)}{n\cdot x^{(n-1)/n}}=\frac{(y-x)\cdot\sqrt[n]{x}}{nx}\,.$$