Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 13 (13/2015)

Piątek, 26 czerwca 2015 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **98** i **99** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

98. Zapisz liczbę 400 używając trzykrotnie cyfry 4.

99. Zapisz liczbę 500 używając cyfr 4, 6 i 9 (każdej tylko raz).

100. Zapewne wiesz, że $2+2=2\cdot 2$. A czy da się tak dobrać liczbę rzeczywistą x, aby $3+x=3\cdot x$? A może potrafisz jakoś opisać wszystkie pary liczb rzeczywistych x, y, których suma jest równa ich iloczynowi?

Która liczba jest większa?

101. $\sqrt{2}$ czy $\dfrac{7}{5}$?   **102.** $\sqrt{3}$ czy $\dfrac{7}{4}$?   **103.** $\sqrt[3]{15}$ czy $\dfrac{5}{2}$?

104. $\left(\sqrt{17}-4\right)^{23}$ czy $\left(8-3\sqrt{7}\right)^{17}$?   **105.** 2^{51} czy 3^{29} ?   **106.** 3^{1001} czy 5^{666} ?

107. $100!$ czy 10^{200} ?   **108.** $1000!$ czy 10^{1800} ?   **109.** $\sqrt[10]{10}$ czy $1{,}25$?

Rozwiązania zadań 90–97

90. $222=(3!)^3+3!$

91. $16=\dfrac{(3!)!}{5\cdot 9}$

92. Łamigłówka ma 7 rozwiązań:

5, 1, 6, 2, 7, 3, 8, 4
7, 1, 2, 5, 3, 6, 8, 4
8, 2, 5, 3, 6, 4, 7, 1
8, 4, 2, 7, 3, 1, 5, 6
8, 4, 2, 7, 3, 6, 5, 1
8, 4, 3, 5, 1, 7, 2, 6
8, 4, 6, 3, 7, 2, 5, 1

93. $2187=\sqrt{\dfrac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{3^{5!}}}}}{3}}$

94. Nierówność udowodnioną w zadaniu **89** możemy przepisać w postaci

$$\frac{(a^n-b^n)\cdot a}{n\cdot a^n}<a-b<\frac{(a^n-b^n)\cdot b}{n\cdot b^n}\,, \tag{1}$$

gdzie $a>b$ są liczbami rzeczywistymi dodatnimi, a $n>1$ jest liczbą naturalną.

Zastosowanie nierówności (1) przy $n=6$ prowadzi do

$$\frac{2\cdot\sqrt{3}}{6\cdot 27}<\sqrt{3}-\sqrt[3]{5}<\frac{2\cdot\sqrt[3]{5}}{6\cdot 25}\,. \tag{2}$$

Szacujemy od góry prawą stronę nierówności (2):

$$\frac{2\cdot\sqrt[3]{5}}{6\cdot 25}<\frac{2\cdot\sqrt[3]{8}}{6\cdot 25}=\frac{2\cdot 2}{6\cdot 25}=\frac{2}{75}<\frac{2}{60}=\frac{1}{30}\,,$$

a lewą stronę od dołu:

$$\frac{2\cdot\sqrt{3}}{6\cdot 27}=\frac{\sqrt{12}}{6\cdot 27}>\frac{\sqrt{9}}{6\cdot 27}=\frac{3}{6\cdot 27}=\frac{1}{54}>\frac{1}{60}\,.$$

Udowodniliśmy więc wymagane oszacowania ze stałą $m=30$.

95. Zastosowanie nierówności (1) przy $n=21$ prowadzi do

$$\frac{3\cdot\sqrt[3]{2}}{21\cdot128}<\sqrt[3]{2}-\sqrt[7]{5}<\frac{3\cdot\sqrt[7]{5}}{21\cdot125}\,. \tag{3}$$

Szacujemy od góry prawą stronę nierówności (3):

$$\frac{3\cdot\sqrt[7]{5}}{21\cdot125}=\frac{\sqrt[7]{5}}{7\cdot125}<\frac{\sqrt[4]{5}}{7\cdot125}<\frac{\sqrt[4]{\frac{81}{16}}}{7\cdot125}=\frac{\frac{3}{2}}{7\cdot125}=\frac{3}{14\cdot125}<\frac{3}{12\cdot125}=\frac{1}{500}\,,$$

a lewą stronę od dołu:

$$\frac{3\cdot\sqrt[3]{2}}{21\cdot128}=\frac{1\cdot\sqrt[3]{2}}{7\cdot128}>\frac{1}{7\cdot128}>\frac{1}{7\cdot130}=\frac{1}{910}>\frac{1}{1000}\,.$$

Udowodniliśmy więc wymagane oszacowania ze stałą $m=500$.

96. Zastosowanie nierówności (1) przy $n=30$ prowadzi do

$$\frac{24\cdot\sqrt[3]{2}}{30\cdot1024}<\sqrt[3]{2}-\sqrt[10]{10}<\frac{24\cdot\sqrt[10]{10}}{30\cdot1000}\,. \tag{4}$$

Szacujemy od góry prawą stronę nierówności (4):

$$\frac{24\cdot\sqrt[10]{10}}{30\cdot1000}<\frac{24\cdot\sqrt[8]{10}}{30\cdot1000}<\frac{24\cdot\sqrt[8]{25}}{30\cdot1000}=\frac{24\cdot\sqrt[4]{5}}{30\cdot1000}<\frac{24\cdot\sqrt[4]{\frac{81}{16}}}{30\cdot1000}=\frac{24\cdot\frac{3}{2}}{30\cdot1000}=\frac{12}{10000}<\frac{12,5}{10000}=\frac{1}{800}\,,$$

a lewą stronę od dołu:

$$\frac{24\cdot\sqrt[3]{2}}{30\cdot1024}>\frac{24}{30\cdot1024}=\frac{4}{5\cdot1024}=\frac{1}{5\cdot256}=\frac{1}{1280}>\frac{1}{1600}\,.$$

Udowodniliśmy więc wymagane oszacowania ze stałą $m=800$.

Uwaga: W obliczu niezbyt wyśrubowanych wymagań nałożonych w treści zadania na dowodzone nierówności, mogliśmy sobie pozwolić na sporą rozrzutność w szacowaniach. A oto jak można te oszacowania poprawić. Korzystając z łatwej do weryfikacji równości $1,25\cdot1,25\cdot1,28=2$ otrzymujemy $1,25^3<2<1,28^3$, skąd $1,25<\sqrt[3]{2}<1,28$. Ponieważ $\sqrt[10]{10}<\sqrt[3]{2}$, mamy także $\sqrt[10]{10}<1,28$. W konsekwencji wobec nierówności $1,024\cdot0,976=(1+0,024)\cdot(1-0,024)=1-0,024^2<1$ otrzymujemy

$$\frac{24\cdot\sqrt[10]{10}}{30\cdot1000}<\frac{24\cdot1,28}{30\cdot1000}=\frac{4\cdot1,28}{5000}=\frac{5,12}{5000}=\frac{1,024}{1000}<\frac{1}{976}\quad\text{oraz}\quad\frac{24\cdot\sqrt[3]{2}}{30\cdot1024}>\frac{24\cdot1,25}{30\cdot1024}=\frac{1}{1024}\,.$$

97. Zastosowanie nierówności (1) przy $n=70$ prowadzi do

$$\frac{(10^7-5^{10})\cdot\sqrt[10]{10}}{70\cdot10^7}<\sqrt[10]{10}-\sqrt[7]{5}<\frac{(10^7-5^{10})\cdot\sqrt[7]{5}}{70\cdot5^{10}}\,. \tag{5}$$

Szacujemy od góry prawą stronę nierówności (5):

$$\frac{(10^7-5^{10})\cdot\sqrt[7]{5}}{70\cdot5^{10}}=\frac{5^7\cdot(2^7-5^3)\cdot\sqrt[7]{5}}{70\cdot5^{10}}=\frac{3\cdot\sqrt[7]{5}}{70\cdot5^3}<\frac{3\cdot\sqrt[4]{5}}{70\cdot5^3}<\frac{3\cdot\sqrt[4]{\frac{81}{16}}}{70\cdot5^3}=\frac{3\cdot\frac{3}{2}}{70\cdot5^3}=$$

$$=\frac{9}{140\cdot125}<\frac{9}{135\cdot100}=\frac{1}{15\cdot100}=\frac{1}{1500}\,,$$

a lewą stronę od dołu:

$$\frac{(10^7-5^{10})\cdot\sqrt[10]{10}}{70\cdot10^7}>\frac{(10^7-5^{10})\cdot1}{70\cdot10^7}=\frac{5^7\cdot(2^7-5^3)}{70\cdot10^7}=\frac{3}{70\cdot2^7}=\frac{3}{70\cdot128}=\frac{3}{8960}>\frac{3}{9000}=\frac{1}{3000}\,.$$

Udowodniliśmy więc wymagane oszacowania ze stałą $m=1500$.