Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 14 (14/2015)

Piątek, 3 lipca 2015 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **110** i **111** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

110. Zapisz liczbę 102 używając cyfr 3, 4 i 7 (każdej tylko raz).

111. Zapisz liczbę 102 używając cyfr 3, 6 i 7 (każdej tylko raz).

112. Zapewne wiesz, że $2+2=2\cdot 2$. I wiesz pewnie, że $1+2+3=1\cdot 2\cdot 3$. A które cztery liczby całkowite dodatnie mają sumę równą iloczynowi? A czy potrasz podać pięć takich liczb? A inne piątki takich liczb?

Która liczba jest większa?

113. $\sqrt{26}$ czy $2+\sqrt[3]{26}$?

114. $\sqrt{10}$ czy $\sqrt{2}+\sqrt{3}$?

115. $4\sqrt{5}$ czy $\dfrac{1000}{111}$?

116. $\dfrac{123}{245}$ czy $\dfrac{333}{667}$?

117. 2^{750} czy 5^{320} ?

118. 2^{160} czy 3^{99} ?

119. $(10^{10})!$ czy $10^{10^{11}}$?

120. $(10^{13})!$ czy $10^{10^{14}}$?

121. 45^{13} czy 2^{72} ?

Rozwiązania zadań 98–109

98. $400=\sqrt{(4!-4)^4}$

99. $500=\dfrac{9!}{6!}-4$

100. *Odpowiedź:* Tak, wystarczy przyjąć $x=3/2$. Mamy wówczas $3+x=3\cdot x=9/2$. Ogólnie, dla niezerowych liczb x, y równość $x+y=xy$ jest równoważna równości

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1\,.$$

Powyższa zależność jest łatwa do zapamiętania w słownym sformułowaniu nie używjącym wzorków: *Suma dwóch niezerowych liczb jest równa ich iloczynowi wtedy i tylko wtedy, gdy suma odwrotności tych liczb jest równa 1.*

Stąd łatwo sypać przykładami par liczb o sumie równej iloczynowi:

$$\left(\frac{7}{3},\frac{7}{4}\right),\qquad \left(-1,\frac{1}{2}\right),\qquad \left(-\frac{5}{2},\frac{5}{7}\right),\qquad \left(-2,\frac{2}{3}\right).$$

101. *Odpowiedź:* $\sqrt{2}>7/5$.

Powyższa nierówność po podniesieniu do kwadratu przyjmuje postać $2>\dfrac{49}{25}$, co jest równoważne nierówności $50>49$.

102. *Odpowiedź:* $\sqrt{3}<7/4$.

Powyższa nierówność po podniesieniu do kwadratu przyjmuje postać $3<\dfrac{49}{16}$, co jest równoważne nierówności $48<49$.

103. *Odpowiedź:* $\sqrt[3]{15}<5/2$.

Powyższa nierówność po podniesieniu do sześcianu przyjmuje postać $15<\dfrac{125}{8}$, co jest równoważne nierówności $120<125$.

104. Dla każdej z podanych liczb korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów, a następnie wykonujemy szacowania:

$$\left(\sqrt{17}-4\right)^{23}=\left(\frac{17-4^2}{\sqrt{17}+4}\right)^{23}=\left(\frac{1}{\sqrt{17}+4}\right)^{23}<\left(\frac{1}{\sqrt{16}+4}\right)^{23}=\left(\frac{1}{4+4}\right)^{23}=\frac{1}{2^{3\cdot 23}}=\frac{1}{2^{69}}$$

oraz

$$\left(8-3\sqrt{7}\right)^{17}=\left(\frac{8^2-3^2\cdot 7}{8+\sqrt{63}}\right)^{17}=\left(\frac{1}{8+\sqrt{63}}\right)^{17}>\left(\frac{1}{8+\sqrt{64}}\right)^{17}=\left(\frac{1}{8+8}\right)^{17}=\frac{1}{2^{4\cdot 17}}=\frac{1}{2^{68}}\,.$$

Stąd wynika, że

$$\left(\sqrt{17}-4\right)^{23}<\frac{1}{2^{69}}<\frac{1}{2^{68}}<\left(8-3\sqrt{7}\right)^{17}\,.$$

Odpowiedź: $\left(\sqrt{17}-4\right)^{23}<\left(8-3\sqrt{7}\right)^{17}$.

105. *Odpowiedź:* $2^{51}>3^{29}$.
Powyższa nierówność wynika z następujących oszacowań:

$$3^{29}<3^{30}=27^{10}<32^{10}=2^{50}<2^{51}\,.$$

106. *Odpowiedź:* $3^{1001}>5^{666}$.
Powyższa nierówność wynika z następujących oszacowań:

$$5^{666}=25^{333}<27^{333}=3^{999}<3^{1001}\,.$$

107. *Odpowiedź:* $100!<10^{200}$.
Liczba 100! jest iloczynem 100 czynników dodatnich, z których 99 jest mniejszych od 100, a jeden jest równy 100. Zatem

$$100!<100^{100}=10^{200}\,.$$

108. *Odpowiedź:* $1000!>10^{1800}$.
W iloczynie tworzącym liczbę 1000! występuje 900 czynników większych od 100, skąd

$$1000!>100^{900}=10^{1800}\,.$$

109. *Odpowiedź:* $\sqrt[10]{10}>1,25$.

Sposób I: Powyższa nierówność jest równoważna następującym nierównościom:

$$10>\left(\frac{5}{4}\right)^{10}, \qquad 10>\frac{5^{10}}{2^{20}}, \qquad 2^{21}>5^9, \qquad 2^7>5^3, \qquad 128>125\,.$$

Sposób II: Z równości $1,25\cdot 1,25\cdot 1,28=2$ oraz $2^3\cdot 1,25=10$ otrzymujemy

$$10=1,25^7\cdot 1,28^3>1,25^{10}\,,$$

skąd $\sqrt[10]{10}>1,25$.