Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 15 (15/2015)
Piątek, 10 lipca 2015 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **122**, **123** i **124** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

122. Zapisz liczbę 335 używając cyfr 1, 5 i 8 (każdej tylko raz).

123. Zapisz liczbę 990 używając cyfr 1, 5 i 8 (każdej tylko raz).

124. Zapisz liczbę 31 używając cyfr 1, 5 i 8 (każdej tylko raz).

125. Liczbę 6^6 możemy zapisać w postaci a^b, gdzie a, b są liczbami naturalnymi większymi od 1, na trzy sposoby:

$$6^6 = 36^3 = 216^2 .$$

A na ile sposobów można zapisać w postaci a^b liczbę 36^{36} ?

Która liczba jest większa?

126. $\left(7-\sqrt{17}\right)^{2017}$ czy $\left(7-\sqrt{17}\right)^{2015}$? **127.** $\left(7-\sqrt{37}\right)^{2017}$ czy $\left(7-\sqrt{37}\right)^{2015}$?

128. $\left(7-\sqrt{57}\right)^{2017}$ czy $\left(7-\sqrt{57}\right)^{2015}$? **129.** $\left(7-\sqrt{77}\right)^{2017}$ czy $\left(7-\sqrt{77}\right)^{2015}$?

130. 2^{2^5} czy 4^{4^2} ? **131.** 2^{2^6} czy 6^{6^2} ? **132.** $\left(2-\sqrt{3}\right)^{21}$ czy $\left(3-\sqrt{7}\right)^{20}$?

133. $(10^{12})!$ czy $10^{10^{13}}$? **134.** $(10^{11})!$ czy $10^{10^{12}}$?

Rozwiązania zadań 110–121

110. $102 = 3!\cdot(4!-7)$ **111.** $102 = \dfrac{6!-3!}{7}$

112. Cztery liczby 1, 1, 2 i 4 mają sumę i iloczyn równe 8.

Ogólnie, n-ka liczb składająca się z $n-2$ jedynek oraz z liczb 2 i n ma sumę i iloczyn równe $2n$. W szczególności piątka liczb o żądanej własności to 1, 1, 1, 2, 5. Inne piątki to 1, 1, 1, 3, 3 oraz 1, 1, 2, 2, 2.

113. *Odpowiedź:* $\sqrt{26} > 2+\sqrt[3]{26}$.
Powyższa nierówność wynika z następujących nierówności:

$$\sqrt{26} > \sqrt{25} = 5 = 2+3 = 2+\sqrt[3]{27} > 2+\sqrt[3]{26} .$$

114. *Odpowiedź:* $\sqrt{10} > \sqrt{2}+\sqrt{3}$.
Powyższa nierówność po podniesieniu stronami do kwadratu przyjmuje postać:

$$10 > 2+2\sqrt{6}+3 ,$$

co jest równoważne kolejnym nierównościom:

$$5 > 2\sqrt{6}, \qquad 25 > 24 .$$

115. *Odpowiedź:* $4\sqrt{5} < 1000/111$.
Powyższa nierówność wynika z następujących zależności:

$$4\sqrt{5} = \sqrt{80} < \sqrt{81} = 9 = \frac{999}{111} < \frac{1000}{111} .$$

116. *Odpowiedź:* $123/245>333/667$.
Powyższa nierówność wynika z następujących nierówności:

$$\frac{123}{245}>\frac{123}{246}=\frac{1}{2}=\frac{333}{666}>\frac{333}{667}\,.$$

117. *Odpowiedź:* $2^{750}>5^{320}$.

Sposób I: Powyższa nierówność wynika z następujących oszacowań:

$$5^{320}<5^{321}=125^{107}<128^{107}=2^{749}<2^{750}\,.$$

Sposób II: Dowodzoną nierówność otrzymamy mnożąc stronami następujące dwie nierówności:

$$\begin{aligned} 128^{10}= && 2^{70}>5^{30} && =125^{10}\,,\\ 32= && 2^{5}>5^{2} && =25 \end{aligned}$$

i podnosząc obie strony powstałej nierówności do dziesiątej potęgi.

118. *Odpowiedź:* $2^{160}>3^{99}$.
Powyższa nierówność wynika z następujących oszacowań:

$$3^{99}<3^{100}=\left(3^5\right)^{20}=243^{20}<256^{20}=\left(2^8\right)^{20}=2^{160}\,.$$

Należy przy tym zwrócić uwagę, że udowodnienie nierówności $3^5<2^8$ nie wymaga wykonywania bezpośrednich obliczeń na liczbach większych od 100. Możemy bowiem wymnożyć stronami następujące dwie nierówności:

$$\begin{aligned} 63= && 3^2\cdot 7<2^6 && =64\,,\\ 27= && 3^3<2^2\cdot 7 && =28 \end{aligned}$$

i podzielić iloczyny uzyskane po obu stronach przez 7.

119. *Odpowiedź:* $(10^{10})!<10^{10^{11}}$.
Szacując każdy z czynników iloczynu tworzącego $(10^{10})!$ od góry przez 10^{10} otrzymujemy

$$\left(10^{10}\right)!<\left(10^{10}\right)^{10^{10}}=10^{10\cdot 10^{10}}=10^{10^{11}}\,.$$

120. *Odpowiedź:* $(10^{13})!>10^{10^{14}}$.
Iloczyn tworzący $(10^{13})!$ zawiera $9\cdot 10^{12}$ czynników większych od 10^{12}, skąd otrzymujemy oszacowanie

$$\left(10^{13}\right)!>\left(10^{12}\right)^{9\cdot 10^{12}}=10^{12\cdot 9\cdot 10^{12}}=10^{108\cdot 10^{12}}>10^{100\cdot 10^{12}}=10^{10^{14}}\,.$$

121. *Odpowiedź:* $45^{13}<2^{72}$.
Powyższa nierówność sprowadza się do nierówności

$$45^{13}=3^{26}\cdot 5^{13}<2^{72}\,,$$

którą otrzymujemy z wymnożenia stronami następujących nierówności:

$$\begin{aligned} 125^4= && 5^{12}<2^{28} && =128^4\,,\\ 243^5= && 3^{25}<2^{40} && =256^5\,,\\ 15= && 3\cdot 5<2^4 && =16\,. \end{aligned}$$