Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 17 (17/2015)
Piątek, 24 lipca 2015 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **148** i **149** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

148. Zapisz liczbę 41 używając cyfr 1, 3 i 7 (każdej tylko raz). Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

149. Zapisz liczbę 41 używając cyfr 4, 6 i 7 (każdej tylko raz). Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

150. Zapisz liczbę 216^{216} w postaci a^{b^c}, gdzie a, b, c są liczbami naturalnymi większymi od 1, a przy tym liczba c jest możliwie największa.

Która liczba jest większa?

151. $\log_2 3$ czy $\log_3 10$?

152. $\log_2 17$ czy $\log_3 80$?

153. $\log_2 3$ czy $\log_3 5$?

154. $\log_2 3$ czy $\log_5 11$?

155. 2^{2^8} czy 8^{8^2} ?

156. 2^{2^7} czy 7^{7^2} ?

157. $\left(\dfrac{25}{12}\right)^{25/12}$ czy 5 ?

158. $2^{2^{2^{11}}}$ czy $1000^{2^{2^{10}}}$?

159. $\left(1+\sqrt{2}\right)^{49}$ czy $\left(2+\sqrt{3}\right)^{31}$?

Rozwiązania zadań 135–147

135. $888=4!\cdot 37$

136. $29=3!\cdot 5-1=\sqrt{(3!)!+5!+1}$

137. *Odpowiedź:* $60^{60}=\left(60^{15}\right)^{2^2}$.

138. *Odpowiedź:* $33/40>22/27$.
Dla dowodu powyższej nierówności wystarczy sprowadzić oba ułamki do wspólnego licznika i porównać mianowniki, co po uporządkowaniu można zapisać jako

$$\frac{33}{40}=\frac{66}{80}>\frac{66}{81}=\frac{22}{27}\,.$$

139. *Odpowiedź:* $5/16>8/27$.
Powyższa nierówność wynika z następujących zależności:

$$\frac{5}{16}=\frac{25}{80}>\frac{24}{81}=\frac{8}{27}\,.$$

Korzystamy przy tym z następującego faktu:
Wartość ułamka o dodatnim liczniku i mianowniku jest tym większa, im większy jest licznik i im mniejszy jest mianownik.

140. *Odpowiedź:* $14/25<19/33$.
Powyższa nierówność wynika z następujących zależności:

$$\frac{14}{25}=\frac{56}{100}<\frac{57}{99}=\frac{19}{33}\,.$$

141. *Odpowiedź:* $\sqrt{110}-10<1234/2467$.
Dla dowodu powyższej nierówności wystarczy zauważyć, że

$$\sqrt{110}-10=\frac{10}{\sqrt{110}+10}=\frac{1}{\sqrt{1,1}+1}<\frac{1}{\sqrt{1}+1}=\frac{1}{2}$$

oraz

$$\frac{1234}{2467}>\frac{1234}{2468}=\frac{1}{2}\,.$$

142. *Odpowiedź:* $11-\sqrt{110}>1234/2469$.
Dla dowodu powyższej nierówności wystarczy zauważyć, że

$$11-\sqrt{110}=\frac{11}{11+\sqrt{110}}=\frac{1}{1+\sqrt{10/11}}>\frac{1}{1+\sqrt{1}}=\frac{1}{2}$$

oraz

$$\frac{1234}{2469}<\frac{1234}{2468}=\frac{1}{2}\,.$$

143. *Odpowiedź:* $2^{2^{10}}=16^{16^2}$.
Dla dowodu powyższej równości wystarczy zauważyć, że $16^{16^2}=16^{2^8}=\left(2^4\right)^{2^8}=2^{4\cdot 2^8}=2^{2^{10}}$.
Jako wniosek otrzymujemy nierówności $2^{2^n}>n^{n^2}$ dla $10\leqslant n\leqslant 16$, mamy bowiem

$$2^{2^n}\geqslant 2^{2^{10}}=16^{16^2}\geqslant n^{n^2}\,,$$

gdzie co najmniej jedna nierówność jest ostra.

144. *Odpowiedź:* $2^{2^9}>9^{9^2}$.
Powyższa nierówność wynika z następujących oszacowań:

$$9^{9^2}=9^{81}=3^{162}<4^{162}<4^{256}=4^{2^8}=2^{2\cdot 2^8}=2^{2^9}\,.$$

Uwaga: W połączeniu z poprzednim zadaniem mamy $2^{2^n}>n^{n^2}$ dla $9\leqslant n\leqslant 16$.

145. *Odpowiedź:* $\left(2\sqrt{7}-3\sqrt{3}\right)^{25}<\left(\sqrt{19}-4\right)^{49}$.
Dla dowodu wystarczy zauważyć, że

$$\left(2\sqrt{7}-3\sqrt{3}\right)^{25}=\left(\frac{1}{2\sqrt{7}+3\sqrt{3}}\right)^{25}=\left(\frac{1}{\sqrt{28}+\sqrt{27}}\right)^{25}<\left(\frac{1}{5+5}\right)^{25}=\frac{1}{10^{25}}$$

oraz

$$\left(\sqrt{19}-4\right)^{49}=\left(\frac{3}{\sqrt{19}+4}\right)^{49}>\left(\frac{3}{5+4}\right)^{49}=\frac{1}{3^{49}}>\frac{1}{3^{50}}=\frac{1}{9^{25}}>\frac{1}{10^{25}}\,.$$

146. *Odpowiedź:* $\left(\frac{3}{2}\right)^{3/2}<2$.
Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^3<2^2\,,\qquad \frac{3^3}{2^3}<2^2\,,\qquad 3^3<2^5\,,\qquad 27<32\,.$$

147. Zauważmy, że $a^{256}=(a^{16})^{16}=2^{16}=256^2>256^a$, gdyż $a<2$.