Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 18 (18/2015)
Piątek, 31 lipca 2015 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **160** i **161** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

160. Zapisz liczbę 225 używając cyfr 2, 5 i 8 (każdej tylko raz).

161. Zapisz liczbę 76 używając cyfr 1, 2, 3 i 4 (każdej tylko raz). Podaj trzy istotnie różne rozwiązania.

162. Zapisz liczbę 216^{216} w postaci a^{b^c}, gdzie a, b, c są liczbami naturalnymi większymi od 1, a przy tym liczba a jest możliwie najmniejsza.

Która liczba jest większa?

163. $\log_2 3$ czy $\dfrac{5}{3}$? **164.** $\log_2 3$ czy $\dfrac{8}{5}$? **165.** $\log_2 5$ czy $\dfrac{7}{3}$?

166. $\log_3 13$ czy $\dfrac{7}{3}$? **167.** $\left(\dfrac{5}{2}\right)^{5/2}$ czy 5 ? **168.** $\left(\dfrac{5}{2}\right)^{5/2}$ czy 10 ?

169. $a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{16}}}}}}}}}}}}}}}}$ czy 10^{10} ? Liczba $a=\sqrt[4]{2}$ występuje w pierwszym wyrażeniu 16 razy.

170. $\sqrt{7}-2\sqrt[4]{3}$ czy $1/100$? **171.** $2^{2^{15/2}}$ czy $(15/2)^{(15/2)^2}$?

Rozwiązania zadań 148–159

148. $41=3!\cdot 7-1=\sqrt{\dfrac{7!}{3}+1}$ **149.** $41=47-6=\sqrt{7^4-6!}$

150. *Odpowiedź:* $216^{216}=\left(6^8\right)^{3^4}$.

151. *Odpowiedź:* $\log_2 3<\log_3 10$.
Powyższa nierówność wynika z następujących nierówności:

$$\log_2 3<\log_2 4=2=\log_3 9<\log_3 10\,.$$

152. *Odpowiedź:* $\log_2 17>\log_3 80$.
Powyższa nierówność wynika z następujących nierówności:

$$\log_2 17>\log_2 16=4=\log_3 81>\log_3 80\,.$$

153. *Odpowiedź:* $\log_2 3>\log_3 5$.
Powyższa nierówność wynika z następujących nierówności:

$$\log_2 3=\log_2\sqrt{9}>\log_2\sqrt{8}=\frac{3}{2}=\log_3\sqrt{27}>\log_3\sqrt{25}=\log_3 5\,.$$

154. *Odpowiedź:* $\log_2 3>\log_5 11$.
Powyższa nierówność wynika z następujących nierówności:

$$\log_2 3=\log_2\sqrt{9}>\log_2\sqrt{8}=\frac{3}{2}=\log_5\sqrt{125}>\log_5\sqrt{121}=\log_5 11\,.$$

155. *Odpowiedź:* $2^{2^8} > 8^{8^2}$.
Powyższa nierówność wynika z następujących zależności:

$$8^{8^2} < 16^{8^2} = 16^{64} = 2^{4\cdot 64} = 2^{256} = 2^{2^8}\,.$$

Uwaga: W połączeniu z uwagą po rozwiązaniu zadania **144** (**Trapez 17**) mamy

$$2^{2^n} > n^{n^2} \quad \text{dla} \quad 8 \leqslant n \leqslant 16\,.$$

156. *Odpowiedź:* $2^{2^7} < 7^{7^2}$.
Powyższa nierówność wynika z następujących zależności:

$$7^{7^2} = 7^{49} > 7^{48} = \left(7^3\right)^{2^4} = 343^{2^4} > 256^{2^4} = 2^{2^3\cdot 2^4} = 2^{2^7}\,.$$

Uwaga: W połączeniu z uwagą po rozwiązaniu zadania **131** (**Trapez 16**) mamy

$$2^{2^n} < n^{n^2} \quad \text{dla} \quad 3 \leqslant n \leqslant 7\,.$$

Wraz z uwagą do zadania **155** stanowi to motywację do sformułowania zadania **171**.

157. *Odpowiedź:* $\left(\frac{25}{12}\right)^{25/12} < 5$.
Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom:

$$\left(\frac{25}{12}\right)^{25} < 5^{12}\,, \qquad \frac{25^{25}}{12^{25}} < 5^{12}\,, \qquad 5^{38} < 2^{50}\cdot 3^{25}\,,$$

a to otrzymujemy z wymnożenia stronami następujących nierówności:

$$\begin{aligned} 25^8 = {}& 5^{16} < 3^{24} &&= 27^8\,,\\ 125^7 = {}& 5^{21} < 2^{49} &&= 128^7\,,\\ 5 = {}& 5 < 2\cdot 3 &&= 6\,. \end{aligned}$$

158. *Odpowiedź:* $2^{2^{2^{11}}} > 1000^{2^{2^{10}}}$.
Korzystając z własności potęgowania otrzymujemy

$$2^{2^{2^{11}}} = 2^{2^{2^{10}+2^{10}}} = 2^{2^{2^{10}}\cdot 2^{2^{10}}} = \left(2^{2^{2^{10}}}\right)^{2^{2^{10}}} > 1000^{2^{2^{10}}}\,.$$

Ostatnia nierówność wynika z nierówności

$$2^{2^{2^{10}}} = 2^{2^{1024}} > 2^{2^{10}} = 2^{1024} > 2^{10} = 1024 > 1000\,.$$

159. *Odpowiedź:* $\left(1+\sqrt{2}\right)^{49} > \left(2+\sqrt{3}\right)^{31}$.
Zauważmy, że

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^3 = 7 + 5\sqrt{2} = 7 + \sqrt{50} > 14$$

oraz

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^2 = 7 + 4\sqrt{3} = 7 + \sqrt{48} < 14\,.$$

Zatem

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^{49} > \left(1+\sqrt{2}\right)^{48} > 14^{16} > \left(2+\sqrt{3}\right)^{32} > \left(2+\sqrt{3}\right)^{31}\,.$$

Uwaga: Liczbę 14 w powyższych oszacowaniach można pominąć, gdyż nie wnosi ona niczego poza pewnym komfortem psychicznym (oszacowanie każdej z liczb przez wyrażenie mające przyjazną postać). Oszacowania przyjmą wówczas następującą postać:

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^{49} > \left(1+\sqrt{2}\right)^{48} = \left(7+\sqrt{50}\right)^{16} > \left(7+\sqrt{48}\right)^{16} = \left(2+\sqrt{3}\right)^{32} > \left(2+\sqrt{3}\right)^{31}\,.$$