Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 19 (19/2015)
Piątek, 7 sierpnia 2015 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **172** i **173** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

172. Zapisz liczbę 65536 używając cyfr 2, 2 i 3.

173. Zapisz liczbę 505 używając trzykrotnie cyfry 4 i jednokrotnie cyfry 1.

174. Zapisz liczbę 500^{500} w postaci a^{b^c}, gdzie a, b, c są liczbami naturalnymi większymi od 1, a przy tym liczba a jest możliwie najmniejsza.

Która liczba jest większa?

175. $\log_3 26$ czy $1+\log_5 26$?

176. $\log_5 123$ czy $1+\log_{11} 123$?

177. $\log_2 127$ czy $4+\log_5 127$?

178. $\log_2 5$ czy $\frac{5}{3}+\log_{11} 5$?

179. $\left(\frac{5}{2}\right)^{5/2}$ czy 8 ?

180. $\left(\frac{5}{2}\right)^{5/2}$ czy 9 ?

181. 2^{3^4} czy 4^{3^3} ?

182. $2\sqrt[3]{4}-3$ czy $1/10$?

183. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{3}}}}}}}}$ czy 10^{10} ? Liczba $\sqrt{2}$ występuje 8 razy.

Rozwiązania zadań 160–171

160. $225=\left(\frac{5!}{8}\right)^2$

161. $76=3!\cdot 12+4=4^3+12=4\cdot\sqrt{\frac{(3!)!}{2}+1}$

162. *Odpowiedź:* $216^{216}=36^{18^2}$.

163. *Odpowiedź:* $\log_2 3<5/3$.

Bezpośrednio z definicji logarytmu wynika równość

$$\frac{5}{3}=\log_2 2^{5/3}\,,$$

a zatem podana w odpowiedzi nierówność jest równoważna nierówności

$$\log_2 3<\log_2 2^{5/3}\,.$$

Ponieważ logarytm przy podstawie większej od 1 jest funkcją rosnącą, można go pominąć po obu stronach nierówności. Otrzymujemy więc kolejno:

$$3<2^{5/3}\,,\qquad 3^3<2^5\,,\qquad 27<32\,.$$

164. *Odpowiedź:* $\log_2 3<8/5$.

Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom:

$$3<2^{8/5}\,,\qquad 3^5<2^8\,,\qquad 243<256\,.$$

165. *Odpowiedź:* $\log_2 5<7/3$.

Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom:

$$5<2^{7/3}\,,\qquad 5^3<2^7\,,\qquad 125<128\,.$$

166. *Odpowiedź:* $\log_3 13 > 7/3$.
Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom:

$$13 > 3^{7/3}, \qquad 13^3 > 3^7, \qquad 2197 > 2187.$$

167. *Odpowiedź:* $\left(\frac{5}{2}\right)^{5/2} > 5$.
Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom:

$$\left(\frac{5}{2}\right)^5 > 5^2, \qquad \frac{5^5}{2^5} > 5^2, \qquad 5^3 > 2^5, \qquad 125 > 32.$$

168. *Odpowiedź:* $\left(\frac{5}{2}\right)^{5/2} < 10$.
Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom:

$$\left(\frac{5}{2}\right)^5 < 10^2, \qquad \frac{5^5}{2^5} < 2^2 \cdot 5^2, \qquad 5^3 < 2^7, \qquad 125 < 128.$$

169. Z równości $a^{16} = 16$ wynika, że pierwsza liczba jest równa 16, jest więc mniejsza.

170. *Odpowiedź:* $\sqrt{7} - 2\sqrt[4]{3} > 1/100$.

Sposób I: Korzystając dwukrotnie ze wzoru na różnicę kwadratów otrzymujemy

$$\sqrt{7} - 2\sqrt[4]{3} = \frac{49-48}{\left(\sqrt{7}+2\sqrt[4]{3}\right)\cdot\left(7+4\sqrt{3}\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{7}+\sqrt[4]{48}\right)\cdot\left(7+\sqrt{48}\right)} >$$
$$> \frac{1}{\left(\sqrt{9}+\sqrt[4]{81}\right)\cdot\left(7+\sqrt{49}\right)} = \frac{1}{6\cdot 14} = \frac{1}{84} > \frac{1}{100}.$$

Sposób II: Korzystając ze wzoru na różnicę czwartych potęg otrzymujemy

$$\sqrt{7} - 2\sqrt[4]{3} = \frac{1}{\sqrt[4]{49^3}+\sqrt[4]{49^2\cdot 48}+\sqrt[4]{49\cdot 48^2}+\sqrt[4]{48^3}} > \frac{1}{\sqrt[4]{49^3}+\sqrt[4]{49^2\cdot 49}+\sqrt[4]{49\cdot 49^2}+\sqrt[4]{49^3}} =$$
$$= \frac{1}{4\cdot\sqrt[4]{49^3}} = \frac{1}{4\cdot\sqrt{7^3}} = \frac{1}{4\cdot 7\cdot\sqrt{7}} = \frac{1}{28\cdot\sqrt{7}} > \frac{1}{28\cdot\sqrt{9}} = \frac{1}{84} > \frac{1}{100}.$$

171. *Odpowiedź:* $2^{2^{15/2}} > (15/2)^{(15/2)^2}$.
Przekształcamy powyższą nierówność następująco:

$$2^{128\cdot\sqrt{2}} > \left(\frac{15}{2}\right)^{225/4},$$
$$2^{512\cdot\sqrt{2}} > \left(\frac{15}{2}\right)^{225},$$

a to wynika z poniższego ciągu nierówności:

$$2^{512\cdot\sqrt{2}} > 2^{500\cdot 1,4} = 2^{700} > 2^{675} = 8^{225} > \left(\frac{15}{2}\right)^{225}.$$