Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 20 (20/2015)

Piątek, 14 sierpnia 2015 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **184** i **185** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

184. Zapisz liczbę 105 używając cyfr 3, 4 i 5 (każdej tylko raz).

185. Zapisz liczbę 105 używając cyfr 3, 4 i 8 (każdej tylko raz).

186. Zapisz liczbę 500^{500} w postaci a^{b^c}, gdzie a, b, c są liczbami naturalnymi większymi od 1, a przy tym liczba b jest możliwie największa.

Która liczba jest większa?

187. $\log_2 5$ czy $\log_3 11$?

188. $\log_5 7$ czy $\log_{11} 19$?

189. $\log_2 3$ czy $\log_5 13$?

190. $\log_3 5$ czy $\log_{15} 56$?

191. $\left(\frac{5}{3}\right)^{5/3}$ czy 3 ?

192. $\left(\frac{5}{3}\right)^{5/3}$ czy 2 ?

193. 2^{2^8} czy 3^{3^5} ?

194. 3^{3^5} czy 5^{5^3} ?

195. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{5}}}}}}}$ czy $10^{10^{10}}$? Liczba $\sqrt{2}$ występuje 7 razy.

Rozwiązania zadań 172–183

172. $65536 = \sqrt{2^{32}} = \sqrt{\sqrt{2^{2^{3!}}}}$

173. $505 = \sqrt{\dfrac{(4!)!}{(4!-4)!} + 1}$

174. *Odpowiedź:* $500^{500} = \left(500^4\right)^{5^3}$.

175. *Odpowiedź:* $\log_3 26 < 1 + \log_5 26$.

Powyższa nierówność wynika z następujących nierówności:

$$\log_3 26 < \log_3 27 = 3 = 1+2 = 1 + \log_5 25 < 1 + \log_5 26\,.$$

176. *Odpowiedź:* $\log_5 123 < 1 + \log_{11} 123$.

Powyższa nierówność wynika z następujących nierówności:

$$\log_5 123 < \log_5 125 = 3 = 1+2 = 1 + \log_{11} 121 < 1 + \log_{11} 123\,.$$

177. *Odpowiedź:* $\log_2 127 < 4 + \log_5 127$.

Powyższa nierówność wynika z następujących nierówności:

$$\log_2 127 < \log_2 128 = 7 = 4+3 = 4 + \log_5 125 < 4 + \log_5 127\,.$$

178. *Odpowiedź:* $\log_2 5 < 5/3 + \log_{11} 5$.

Powyższa nierówność wynika z następujących nierówności:

$$\log_2 5 = \log_2 \sqrt[3]{125} < \log_2 \sqrt[3]{128} = \log_2 \sqrt[3]{2^7} = \log_2 2^{7/3} = \frac{7}{3} =$$

$$= \frac{5}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} + \log_{11} 11^{2/3} = \frac{5}{3} + \log_{11} \sqrt[3]{11^2} = \frac{5}{3} + \log_{11} \sqrt[3]{121} < \frac{5}{3} + \log_{11} \sqrt[3]{125} = \frac{5}{3} + \log_{11} 5\,.$$

179. *Odpowiedź:* $\left(\frac{5}{2}\right)^{5/2}>8$.
Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom:

$$\left(\frac{5}{2}\right)^5>8^2\,, \qquad \frac{5^5}{2^5}<2^6\,, \qquad 5^5>2^{11}\,.$$

Ostatnia nierówność ma postać $3125>2048$, jednak jej udowodnienie nie wymaga wykonywania bezpośrednich obliczeń na liczbach większych od 25. Możemy bowiem wymnożyć stronami następujące trzy nierówności:

$$\begin{aligned} 25^2 = \quad & 5^4 > 2^6\cdot 3^2 && =24^2\,,\\ 5 = \quad & 5\ > 2^2 && =4\,,\\ 9 = \quad & 3^2 > 2^3 && =8 \end{aligned}$$

i podzielić iloczyny uzyskane po obu stronach przez 3^2.

180. *Odpowiedź:* $\left(\frac{5}{2}\right)^{5/2}>9$.
Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom:

$$\left(\frac{5}{2}\right)^5>9^2\,, \qquad \frac{5^5}{2^5}<3^4\,, \qquad 5^5>2^5\cdot 3^4\,.$$

Ostatnia nierówność ma postać $3125>2592$, jednak jej udowodnienie nie wymaga wykonywania bezpośrednich obliczeń na liczbach większych od 25. Możemy bowiem uzyskać ją przez wymnożenie stronami następujących dwóch nierówności:

$$\begin{aligned} 25^2 = \quad & 5^4 > 2^6\cdot 3^2 && =24^2\,,\\ 10 = \quad & 2\cdot 5 > 3^2 && =9 \end{aligned}$$

i obustronne podzielenie otrzymanej nierówności przez 2.

181. *Odpowiedź:* $2^{3^4}>4^{3^3}$.
Powyższa nierówność wynika z następujących przekształceń:

$$4^{3^3}<8^{3^3}=\left(2^3\right)^{3^3}=2^{3\cdot 3^3}=2^{3^4}\,.$$

182. *Odpowiedź:* $2\sqrt[3]{4}-3>1/10$.
Korzystając ze wzoru na różnicę sześcianów otrzymujemy

$$2\sqrt[3]{4}-3=\frac{32-27}{4\sqrt[3]{4^2}+3\cdot 2\sqrt[3]{4}+9}=\frac{5}{8\sqrt[3]{2}+6\sqrt[3]{4}+9}>$$
$$>\frac{5}{8\sqrt[3]{8}+6\sqrt[3]{8}+9}=\frac{5}{16+12+9}=\frac{5}{37}>\frac{5}{50}=\frac{1}{10}\,.$$

183. Niech $a_0=3$ oraz $a_{n+1}=\sqrt{2}^{a_n}$ dla $n=0,1,2,3,\ldots$.
Zauważmy, że dla $2<x\leqslant 3$ zachodzą nierówności

$$2=\sqrt{2}^2<\sqrt{2}^x\leqslant\sqrt{2}^3=2\sqrt{2}=\sqrt{8}<\sqrt{9}=3\,.$$

Jeśli więc $a_n\in(2,\,3]$, to $a_{n+1}\in(2,\,3)$. Stąd dochodzimy do wniosku, że pierwsza liczba (równa a_8) jest zawarta w przedziale $(2,\,3)$, a zatem jest mniejsza od 10^{10}.