



190. Odpowiedź: $\log_3 5 < \log_{15} 56$.

Powyższa nierówność wynika z następujących zależności:

$$\log_3 5 = \log_{243} 3125 < \log_{225} 3136 = \log_{15} 56.$$

191. Odpowiedź: $\left(\frac{5}{3}\right)^{5/3} < 3$.

Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościami:

$$\left(\frac{5}{3}\right)^5 < 3^3, \quad \frac{5^5}{3^5} < 3^3, \quad 5^5 < 3^8,$$

co możemy otrzymać z wymnożenia stronami następujących dwóch nierówności:

$$\begin{array}{rcl} 25^2 = & 5^4 < 3^6 & = 27^2, \\ 5 = & 5 < 3^2 & = 9. \end{array}$$

192. Odpowiedź: $\left(\frac{5}{3}\right)^{5/3} > 2$.

Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościami:

$$\left(\frac{5}{3}\right)^5 > 2^3, \quad \frac{5^5}{3^5} > 2^3, \quad 5^5 > 3^5 \cdot 2^3,$$

a to otrzymujemy z wymnożenia stronami następujących dwóch nierówności:

$$\begin{array}{rcl} 25 = & 5^2 > 2^3 \cdot 3 & = 24, \\ 125 = & 5^3 > 3^4 & = 81. \end{array}$$

193. Odpowiedź: $2^{2^8} < 3^{3^5}$.

Powyższa nierówność wynika z następujących oszacowań:

$$2^{2^8} = 2^{256} < 2^{300} = 8^{100} < 9^{100} = 3^{200} < 3^{243} = 3^{3^5}.$$

194. Odpowiedź: $3^{3^5} > 5^{5^3}$.

Powyższa nierówność wynika z następujących oszacowań:

$$3^{3^5} = 3^{3 \cdot 3^4} = (3^3)^{3^4} = 27^{81} > 25^{81} = 5^{162} > 5^{125} = 5^{5^3}.$$

195. Odpowiedź: Pierwsza liczba, oznaczona poniżej przez a_7 , jest większa od $10^{10^{10}}$.

Niech $a_0 = 5$ oraz $a_{n+1} = \sqrt{2^{a_n}} = 2^{a_n/2}$ dla $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Wówczas zachodzą następujące nierówności:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2^{5/2} = 4 \cdot \sqrt{2} > 4 \cdot 1,4 = 5,6 > 5,5 = 11/2, \\ a_2 &= 2^{a_1/2} > 2^{11/4} = 4 \cdot 2^{3/4} = 4 \cdot \sqrt{\sqrt{8}} > 4 \cdot \sqrt{\sqrt{6,25}} = 4 \cdot \sqrt{2,5} > 4 \cdot \sqrt{2,25} = 4 \cdot 1,5 = 6, \\ a_3 &> 2^{6/2} = 2^3 = 8, \\ a_4 &> 2^{8/2} = 2^4 = 16, \\ a_5 &> 2^{16/2} = 2^8 = 256, \\ a_6 &> 2^{256/2} = 2^{128} > 2^{120} = (2^{10})^{12} = 1024^{12} > 1000^{12} = 10^{36}, \\ a_7 &> \sqrt{2^{10^{36}}} = \sqrt{2^{10 \cdot 10^{35}}} = 32^{10^{35}} > 10^{10^{35}} > 10^{10^{10}}. \end{aligned}$$

