Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

# TRAPEZ

**Nr 22 (22/2015)**

**Piątek, 28 sierpnia 2015 r.**

### Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **208** i **209** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

**208.** Zapisz liczbę 59 używając cyfr 1, 3 i 5 (każdej tylko raz).

**209.** Zapisz liczbę 624 używając cyfr 3, 4 i 5 (każdej tylko raz).

**210.** Podaj przykład liczby, którą na co najmniej dwa różne sposoby można zapisać w postaci $a^{b^{c^{d^e}}}$, gdzie $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ są liczbami naturalnymi większymi od 1.

### Która liczba jest większa?

**211.** $\log_2 3\cdot\log_5 7$ czy $\log_2 7\cdot\log_5 3$ ?

**212.** $2^{\log_3 5}$ czy $5^{\log_3 2}$ ?

**213.** $\log_2 6+\log_3 6$ czy $\log_2 6\cdot\log_3 6$ ?

**214.** $\log_a b$ czy $\log_b a$ ? Przyjmujemy $a=\log_2 3$ oraz $b=\log_3 2$.

**215.** $\left(\frac{8}{3}\right)^{8/3}$ czy 12 ?

**216.** $\left(\frac{8}{3}\right)^{8/3}$ czy 16 ?

**217.** $2^{2^{70}}$ czy $17^{17^{17}}$ ?

**218.** $2^{2^{27}}$ czy $243^{243^3}$ ?

**219.** $\sqrt{5}-\sqrt[3]{11}$ czy $1/100$ ?

### Rozwiązania zadań 196–207

**196.** $101=\sqrt{5^6}-4!$

**197.** $104=(6+7)\cdot 8=\frac{6!+8}{7}$

**198.** Zadanie ma dwa istotnie różne rozwiązania:
$$2^{9^4}=8^{3^7} \quad\text{oraz}\quad 3^{8^5}=9^{4^7}\,.$$

**199.** *Odpowiedź:* Podane liczby są równe, gdyż obie są równe $-1$.
Wynika to z równości
$$\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)=1 \tag{1}$$
oraz z równości $\log_a\left(a^{-1}\right)=-1$ prawdziwej dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej $a\neq 1$.

**200.** *Odpowiedź:* Podane liczby są równe, gdyż obie są równe $-1$.
To samo, co w zadaniu poprzednim — po zauważeniu, że
$$\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)=1\,. \tag{2}$$

**201.** *Odpowiedź:* Podane liczby są równe.
Wartość logarytmu nie zmieni się, jeżeli podstawę i liczbę logarytmowaną podniesiemy do tej samej potęgi. W szczególności $\log_a b=\log_{(1/a)}(1/b)$ dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich $a$, $b$, gdzie $a\neq 1$.

Równość podanych liczb wynika z powyższej uwagi oraz z równości (1) i (2).

**202.** *Odpowiedź:* Podane liczby są równe.
Rozumowanie identyczne, jak w zadaniu poprzednim.

**203.** *Odpowiedź:* $\left(\frac{7}{3}\right)^{7/3} > 7$.
Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom:

$$\left(\frac{7}{3}\right)^7 > 7^3\,, \qquad \frac{7^7}{3^7} > 7^3\,, \qquad 7^4 > 3^7\,,$$

a to otrzymujemy z połączenia następujących dwóch nierówności:

$$\begin{aligned} 49^2 = \quad & 7^4 > 2^8 \cdot 3^2 & = 48^2\,, \\ 256 = \quad & 2^8 > 3^5 & = 243\,. \end{aligned}$$

**204.** *Odpowiedź:* $\left(\frac{9}{4}\right)^{9/4} > 6$.
Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom:

$$\left(\frac{9}{4}\right)^9 > 6^4\,, \qquad \frac{9^9}{4^9} > 6^4\,, \qquad 3^{14} > 2^{22}\,, \qquad 3^7 > 2^{11}\,.$$

Ostatnia nierówność ma postać $2187 > 2048$, jednak jej udowodnienie nie wymaga wykonywania bezpośrednich obliczeń na liczbach większych od 100. Możemy bowiem wymnożyć stronami następujące dwie nierówności:

$$\begin{aligned} 81^2 = \quad & 3^8 > 2^8 \cdot 5^2 & = 80^2\,, \\ 25 = \quad & 5^2 > 2^3 \cdot 3 & = 24 \end{aligned}$$

i podzielić iloczyny uzyskane po obu stronach przez $3 \cdot 5^2$.

**205.** *Odpowiedź:* $2^{2^{49}} < 3^{3^{33}}$.
Powyższa nierówność wynika z następujących przekształceń:

$$2^{2^{49}} = 2^{2\cdot 2^{48}} = 2^{2\cdot 8^{16}} < 3^{3\cdot 9^{16}} = 3^{3\cdot 3^{32}} = 3^{3^{33}}\,.$$

**206.** *Odpowiedź:* $2^{2^{89}} > 3^{3^{55}}$.
Powyższa nierówność wynika z następujących przekształceń:

$$2^{2^{89}} = 2^{2\cdot 2^{88}} = \left(2^2\right)^{2^{88}} = 4^{256^{11}} > 3^{243^{11}} = 3^{3^{55}}\,.$$

**207.** Niech $a_0 = b_0 = 1$ oraz $a_{n+1} = 1{,}4^{a_n}$ i $b_{n+1} = 1{,}5^{b_n}$ dla $n = 0, 1, 2, 3\ldots$ Przy tych oznaczeniach zadanie sprowadza się do porównania liczb $a_{100}$ i $b_{10}$.

Z nierówności $1{,}4^2 < 2$ oraz $a_0 < 2$ wynika $a_n < 2$ dla dowolnej liczby całkowitej nieujemnej $n$, a więc w szczególności liczba $a_{100}$ jest mniejsza od 2.

Ponadto

$$b_2 = 1.5^{1{,}5} = 1{,}5 \cdot \sqrt{1{,}5} > 1{,}5 \cdot \sqrt{1{,}44} = 1{,}5 \cdot 1{,}2 = 1{,}8\,,$$

a z nierówności $1{,}5^{1{,}8} > 2$ wynika $b_3 > 2$ i dalej $b_n > 2$ dla $n \geqslant 3$. W szczególności liczba $b_{10}$ jest większa od 2.

Dowód nierówności $1{,}5^{1{,}8} > 2$ przeprowadzamy następująco:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{9/5} > 2\,, \qquad \left(\frac{3}{2}\right)^9 > 2^5\,, \qquad 3^9 > 2^{14}\,,$$

a to otrzymujemy z przemnożenia stronami następujących dwóch nierówności:

$$\begin{aligned} 81^2 = \quad & 3^8 > 2^8 \cdot 5^2 & = 80^2\,, \\ 75 = \quad & 3 \cdot 5^2 > 2^6 & = 64 \end{aligned}$$

i obustronnego podzielenia przez $5^2$.

*Odpowiedź:* $a_{100} < 2 < b_{10}$.